# Städtewettbewerb Frühjahr 2010
# Lösungsvorschläge

Hamburg

3. März 2010 [Version 19. April 2010]

## M Mittelstufe

**Aufgabe M.1** (3 P.). In sechs Körben befinden sich Äpfel, Birnen und Pflaumen. In jedem Korb liegen genau so viele Pflaumen wie insgesamt in allen anderen Körben Äpfel enthalten sind. Außerdem liegen in jedem Korb genau so viele Äpfel wie insgesamt in allen anderen Körben Birnen enthalten sind. Zeige, dass die Gesamtanzahl an Früchten durch 31 teilbar ist.

Lösung. In den Körben befinden sich insgesamt fünfmal so viele Pflaumen wie Äpfel: Die Anzahl der Pflaumen in jedem Korb entspricht der Summe der Anzahlen von Äpfeln in den anderen Körben. Daher erhält man die Gesamtanzahl von Pflaumen, indem man diese sechs Summen addiert. Dabei trägt die Anzahl von Äpfeln in einem bestimmten Korb jeweils zu den fünf Summen bei, die der Anzahl von Pflaumen in den anderen Körben entsprechen. Also tritt jede dieser Anzahlen genau fünfmal in der Gesamtsumme auf.

Ebenso folgt, dass sich in den Körben insgesamt fünfmal so viele Äpfel wie Birnen befinden. Daher ist die Gesamtanzahl von Pflaumen 25-mal so groß wie die Gesamtanzahl von Birnen. Also beträgt die Anzahl aller Früchte in allen Körben zusammen das 31-fache der Gesamtanzahl von Birnen. □

**Aufgabe M.2** (3 P.). Karlsson und Lillebror teilen einen quadratischen Kuchen wie folgt untereinander auf: Zuerst bestimmt Karlsson einen Punkt auf dem Kuchen (nicht auf dem Rand). Dann schneidet Lillebror von diesem Punkt aus in eine beliebige Richtung mit einem geraden Schnitt zum Rand des Kuchens. Nun schneidet Karlsson ebenfalls vom gewählten Punkt aus mit einem geraden Schnitt bis zum Rand. Zusätzlich muss dieser Schnitt senkrecht zu dem von Lillebror getätigten Schnitt verlaufen. Der Kuchen ist nun in zwei Stücke zerteilt, von denen Lillebror das kleinere Stück bekommt. Lillebror möchte mindestens ein Viertel des Kuchens bekommen. Kann Karlsson dies verhindern?

Lösung. Karlsson kann nicht verhindern, dass Lillebror mindestens ein Viertel des Kuchens bekommt. Lillebror schneidet von dem gewählten Punkt $P$ aus durch den Mittelpunkt $M$ bis zum Rand. (Wenn der gewählte Punkt der Mittelpunkt $M$ ist, kann Lillebror in eine beliebige Richtung schneiden.)

Die Gerade, die Lillebrors Schnitt verlängert, und ihre Senkrechte durch $M$ zerteilen den Kuchen in vier kongruente Vierecke, denn die Vierecke können durch Drehungen um Vielfache von $90°$ ineinander überführt werden. Karlssons Schnitt verläuft parallel zu der Senkrechten. Da $P$ auf Lillebrors Schnitt außerhalb der Strecke von $M$ bis zum Rand liegt, enthält jedes der beiden Kuchenstücke mindestens eins der vier kongruenten Vierecke und somit mindestens ein Viertel des Kuchens (siehe Abbildung 1). □

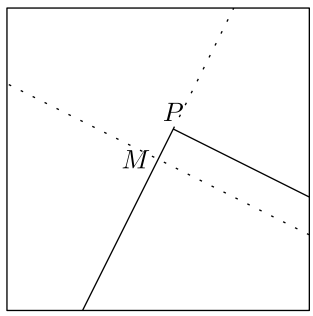


Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.2.

Alternative Lösung. Lillebror erhält mindestens ein Viertel des Kuchens, indem er von dem gewählten Punkt $P$ aus zu der Ecke $A$ schneidet, die am weitesten von $P$ entfernt liegt (falls das auf mehrere Ecken zutrifft, wählt er eine von diesen).

Die Seitenlänge des Quadrats sei 1. Dann hat $P$ zu jeder der an $A$ grenzenden Seiten mindestens den Abstand $\frac{1}{2}$. Andernfalls läge $P$ bezüglich der Mittelsenkrechten durch die andere an $A$ grenzende Seite auf derselben Seite wie $A$, dann wäre $A$ nicht der am weitesten entfernte Eckpunkt.

Unabhängig davon wie Karlsson schneidet, enthält das kleinere Kuchenstück ein Dreieck, das aus $A$, $P$ und einer Ecke $B$ gebildet wird, die $A$ benachbart ist: Andernfalls müsste Karlssons Schnitt innerhalb eines solchen Dreiecks liegen, dann wäre der Winkel $\angle APB$ stumpf. Das ist nicht möglich, weil $P$ dann innerhalb des Thaleskreises durch $A$ und $B$ liegen müsste.

Das Dreieck $ABP$ hat eine Grundseite der Länge 1 und eine Höhe von mindestens der Länge $\frac{1}{2}$, also ist seine Fläche mindestens $\frac{1}{4}$. Daher beträgt auch die Fläche des kleineren Kuchenstücks mindestens $\frac{1}{4}$ (siehe Abbildung 2). □

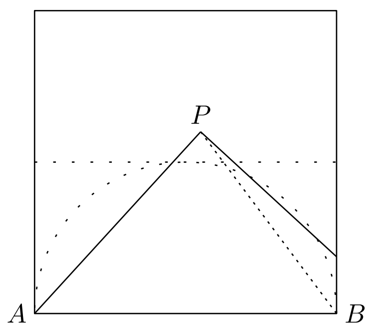


Abbildung 2: Zeichnung zur Alternativlösung von Aufgabe M.2.

**Aufgabe M.3.** In die Ebene sei ein Winkel gezeichnet. Im Folgenden darf lediglich ein Zirkel verwendet werden.

(a) (2 P.) Man soll herausfinden, ob der Winkel spitz ist. Finde die kleinste Anzahl von Kreisen, die man zeichnen muss, um dieses in jedem Fall feststellen zu können.

(b) (2 P.) Wie kann man herausfinden, ob der Winkel genau $31°$ groß ist? (Die Anzahl der hierfür gezeichneten Kreise darf beliebig groß sein.)

Lösung. Mit $S$ bezeichnen wir den Scheitelpunkt des Winkels, mit $a$ und $b$ seine beiden Schenkel.

(a) Ein einziger Kreis genügt! Wir wählen einen beliebigen Punkt auf $a$ (außer $S$) als Kreismittelpunkt aus und zeichnen dann einen Kreis durch $S$. Der Winkel ist genau dann spitz, wenn $b$ den Kreis nicht nur in $S$ trifft.

(b) Zunächst zeichnen wir einen beliebigen Kreis um $S$. Seien $A$ und $B$ die Schnittpunkte der Schenkel $a$ und $b$ mit diesem Kreis, siehe Abbildung 3.

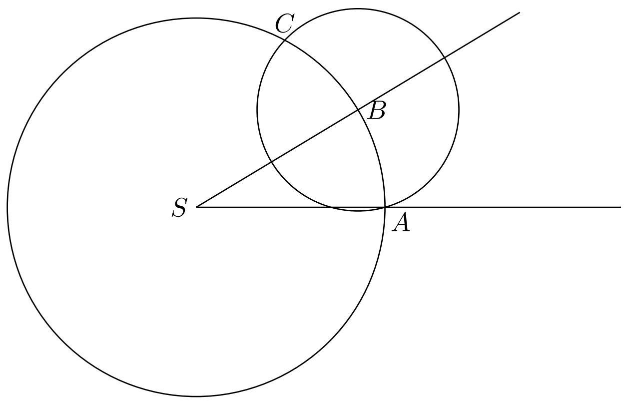


Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

Nun zeichnen wir um $B$ einen Kreis durch $A$. Dieser Kreis schneidet den ersten Kreis in $A$ und in einem weiteren Punkt $C$. (Nur im Fall $\angle ASB = 180°$ haben die Kreise nur einen Schnittpunkt.) Der Winkel $\angle BSC$ ist aus Symmetriegründen ebenso groß wie der Winkel $\angle ASB$. Nun zeichnen wir einen Kreis mit dem gleichen Radius um $C$ und wiederholen dies 359-mal, haben also 360-mal einen Kreisbogen der Länge von $A$ nach $B$ durchlaufen. (Der Kreis um $B$ liefert zwei solche Bögen, jeder spätere Kreis einen weiteren.) Wenn wir danach bei $A$ ankommen und genau 31 mal um den ersten Kreis herum gelaufen sind, ist der Winkel $31°$ groß. □

Alternative Lösung. (b) Will man vermeiden, Umläufe um einen Kreis zu zählen, kann man wie folgt vorgehen. Die ersten beiden Kreise zeichnen wir wie oben: Ein Kreis um $S$ mit Schnittpunkten $A$ mit $a$ und $B$ mit $b$ sowie ein Kreis um $B$ durch $A$. Nach der obigen Überlegung ist der Kreisbogen zwischen $A$ und $B$ ebenso lang wie der Kreisbogen zwischen $B$ und dem zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise. Außerdem zeichnen wir um $A$ einen Kreis durch $S$, siehe Abbildung 4. Dieser Kreis trifft den ersten Kreis zweimal, den „oberen“ Schnittpunkt nennen wir $D$. Dann ist $\angle ASD = 60°$.

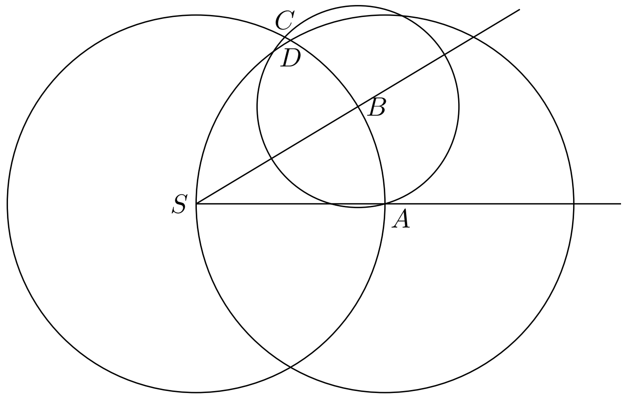


Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

Jetzt überprüfen wir, ob der Punkt $C$ außerhalb des Kreises um $A$ liegt. Tut er das nicht, ist der ursprüngliche Winkel $\angle ASB$ höchstens $30°$ groß. Nehmen wir also an, dass $C$ außerhalb des Kreises um $A$ liegt. Nun ist $\angle ASB = 31°$ genau dann, wenn $\angle DSC = 2\angle ASB - \angle ASD = 2°$.

Dies können wir wie folgt überprüfen: Wir zeichnen um $D$ einen Kreis durch $C$, um den zweiten Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Kreis um $S$ zeichnen wir einen Kreis durch $D$, um dessen zweiten Schnittpunkt mit dem Kreis durch $S$ zeichnen wir einen Kreis mit gleichem Radius und so weiter, siehe Abbildung 5. Wir zeichnen genau 30 Kreise dieser Art.

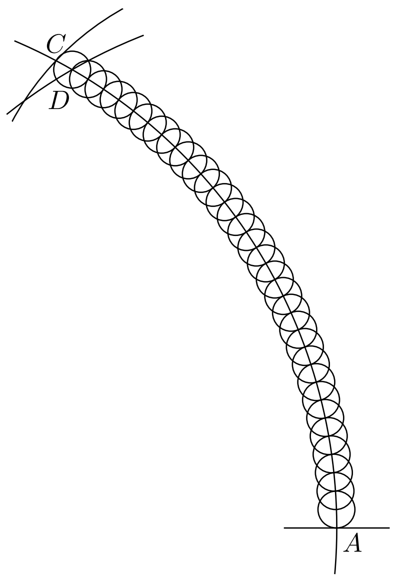


Abbildung 5: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

Befinden sich alle diese 30 Kreise innerhalb des Kreises um $B$ und trifft der letzte Kreis $A$, so war $\angle DSC = \frac{60°}{30} = 2°$ und somit $\angle ASB = 31°$. $\square$

**Aufgabe M.4** (5 P.)**.** Bei einem Mathematik-Wettbewerb ist jeder Teilnehmer mit mindestens dreien der anderen befreundet. Zeige, dass man immer eine gerade Anzahl (mehr als zwei) an Teilnehmern finden und so um einen Tisch platzieren kann, dass jeder am Tisch zwei seiner Freunde als Nachbarn hat.

Lösung. Zunächst stellen wir einige Teilnehmer in einer Reihe auf: Wir beginnen mit einem beliebigen Teilnehmer, stellen einen seiner Freunde neben ihn, einen Freund dieses Freundes daneben und so weiter. Da es nur endlich viele Teilnehmer gibt, können wir irgendwann keinen Freund des letzten in der Reihe finden, der nicht schon selbst in der Reihe steht.

Den letzten Teilnehmer in der Reihe nennen wir $A$. Da alle seine Freunde bereits in der Reihe stehen, hat er mindestens zwei Freunde, die in der Reihe nicht neben ihm stehen. Diese beiden Freunde von $A$ nennen wir $B$ und $C$, wobei $B$ vor $C$ in die Reihe gestellt wurde. Stehen in der Reihe gerade viele Teilnehmer zwischen $A$ und $B$, so kann man diese gemeinsam mit $A$ und $B$ wie gewünscht um den Tisch platzieren. Gleiches gilt, wenn zwischen $A$ und $C$ gerade viele Teilnehmer stehen.

Ist beides nicht der Fall, stehen also sowohl zwischen $A$ und $B$ als auch zwischen $A$ und $C$ ungerade viele Teilnehmer, dann stehen auch zwischen $B$ und $C$ ungerade viele Teilnehmer: Stehen $b$ Leute zwischen $A$ und $B$ und $c$ Leute zwischen $A$ und $C$, dann stehen $b - c - 1$ Leute zwischen $B$ und $C$. Wir können also die Teilnehmer zwischen $B$ und $C$ gemeinsam mit $B$, $C$ und $A$ wie gewünscht um den Tisch platzieren. □

**Aufgabe M.5** (5 P.)**.** Auf einer Tafel stehen die 101 Zahlen $1^2, 2^2, \ldots, 101^2$. Man darf nun zwei Zahlen an der Tafel auswischen und ihre (nichtnegative) Differenz an die Tafel schreiben. Welches ist die kleinste Zahl, die nach 100 dieser Schritte an der Tafel stehen kann?

Lösung. Die kleinste Zahl, die nach hundert Schritten an der Tafel stehen kann, ist 1.

Zunächst beachte man, dass die Summe aller an der Tafel stehenden Zahlen stets ungerade ist: Am Anfang ist dies klar, denn

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 101^2$$

ist als Summe von 51 ungeraden und 50 geraden Zahlen sicherlich ungerade. Ferner verändert sich diese Gesamtsumme durch den Ersetzungsprozess um einen geraden Betrag, denn wenn man zwei Zahlen, etwa $a$ und $b$ (mit $a \geq b$), durch ihre Differenz $a - b$ ersetzt, sinkt die Gesamtsumme um $2b$.

Nach 100 Ersetzungsschritten steht noch genau eine Zahl an der Tafel, diese ist nach Voraussetzung nichtnegativ und außerdem nach der gerade gemachten Überlegung ungerade, also mindestens 1. Es genügt nun zu zeigen, dass man die 1 als letzte Zahl erreichen kann.

Dazu bemerkt man zunächst, dass man aus vier aufeinander folgenden Quadratzahlen $n^2$, $(n+1)^2$, $(n+2)^2$ und $(n+3)^2$ in drei Schritten die Zahl 4 erzeugen kann: Man ersetzt zunächst $n^2$ und $(n+1)^2$ durch $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, dann $(n+2)^2$ und $(n+3)^2$ durch $(n+3)^2 - (n+2)^2 = 2n+5$ und schließlich $2n+1$ und $2n+5$ durch $(2n+5) - (2n+1) = 4$.

Wenn man nun die 96 Zahlen $6^2, 7^2, \ldots, 101^2$ in 24 Vierergruppen unterteilt, kann man aus den Gruppen nach diesem Prinzip jeweils eine 4 erzeugen. An der

Tafel stehen dann die Zahlen $1^2$, $2^2$, $3^2$, $4^2$, $5^2$ sowie 24 mal 4. Von diesen Vieren kann man nun 20 Stück löschen, indem man jeweils zwei von ihnen durch ihre Differenz 0 ersetzt und dann jede dieser Nullen von einer beliebigen Zahl an der Tafel subtrahiert.

An der Tafel stehen jetzt noch 1, 4, 9, 16, 25 sowie vier Vieren. Nun ersetzt man 16 und 9 durch ihre Differenz 7 und dann 25 und die 7 durch 18. Diese 18 verringert man jetzt auf 2, indem man viermal eine 4 subtrahiert. Es bleiben also noch 1, 2 und 4 an der Tafel übrig. Hieraus erhält man $4 - 2 - 1 = 1$. □

# O Oberstufe

**Aufgabe O.1** (3 P.)**.** Auf 2010 Schiffen werden Ananas, Bananen und Zitronen von Südamerika nach Russland transportiert. Auf jedem Schiff befinden sich genau so viele Bananen wie insgesamt von allen anderen Schiffen Zitronen transportiert werden. Außerdem befinden sich auf jedem Schiff genau so viele Zitronen wie insgesamt von allen anderen Schiffen Ananas transportiert werden. Zeige, dass die Gesamtanzahl an Früchten durch 31 teilbar ist.

Lösung. Auf den Schiffen befinden sich insgesamt 2009-mal so viele Bananen wie Zitronen: Die Anzahl der Bananen auf jedem Schiff entspricht der Summe der Anzahlen von Zitronen auf den anderen Schiffen. Die Gesamtanzahl von Bananen erhält man, wenn man diese 2010 Summen addiert. Die Anzahl von Zitronen auf einem bestimmten Schiff trägt jeweils zu den 2009 Summen bei, die der Anzahl von Bananen auf den anderen Schiffen entsprechen. Also tritt jede dieser Anzahlen genau 2009-mal in der Gesamtsumme auf.

Ebenso erhält man, dass sich auf den Schiffen 2009-mal so viele Zitronen wie Ananas befinden. Daher ist die Gesamtanzahl von Bananen $2009^2$-mal so groß wie die Gesamtanzahl von Ananas. Wird die Gesamtanzahl von Ananas mit $A$ bezeichnet, so beträgt Anzahl aller Früchte auf allen Schiffen zusammen $(2009^2 + 2009 + 1)A = (2009 \cdot 2010 + 1)A$.

Da $2009 = 65 \cdot 31 - 6$ und entsprechend $2010 = 65 \cdot 31 - 5$ gilt, lässt $2009 \cdot 2010$ bei der Division durch 31 den Rest 30. $2009 \cdot 2010 + 1$ ist also durch 31 teilbar. □

**Aufgabe O.2** (4 P.)**.** Eine Funktion $f(x)$ besitzt die folgende Eigenschaft: Jede Gerade in der $xy$-Ebene schneidet den Funktionsgraphen $y = f(x)$ ebenso oft wie sie die Parabel $y = x^2$ schneidet. Zeige, dass $f(x) = x^2$.

Lösung. Betrachtet man zunächst die Punkte unterhalb der Parabel $y = x^2$, so werden diese jeweils durch eine nach unten parallel verschobene Tangente an die Parabel geschnitten. Diese hat keinen Schnittpunkt mit $y = x^2$, also kann auch kein Punkt unterhalb von $y = x^2$ zum Graphen von $y = f(x)$ gehören.

Die Tangenten von $y = x^2$ haben genau einen Schnittpunkt mit $y = x^2$, weshalb auf ihnen auch genau ein Punkt von $y = f(x)$ liegen muss. Dieses muss der Schnittpunkt mit $y = x^2$ sein, da jeder andere Punkt der Tangente unterhalb dieser liegt und somit nicht zum Graphen von $y = f(x)$ gehören kann. □

Alternative Lösung. Wir zeigen zunächst, dass $f(a) \geq a^2$ für jede reelle Zahl $a$. Dazu betrachten wir die durch die Geradengleichung $y = 2ax + f(a) - 2a^2$ gegebene Gerade. Diese schneidet den Funktionsgraphen von $f$ im Punkt

$(a, f(a))$, also schneidet sie auch die Parabel $y = x^2$ in mindestens einem Punkt $(x_0, y_0)$. Es folgt

$$2ax_0 + f(a) - 2a^2 = y_0 = {x_0}^2$$

und daraus

$$f(a) = {x_0}^2 - 2ax_0 + 2a^2 = (x_0 - a)^2 + a^2 \geq a^2.$$

Somit ist gezeigt, dass stets $f(a) \geq a^2$ gilt. Nun betrachte man für eine beliebige reelle Zahl $a$ die durch die Gleichung $y = 2ax - a^2$ gegebene Gerade, die die Parabel im Punkt $(a, a^2)$ und somit den Graphen von $f$ mindestens in einem Punkt $(x_1, y_1)$ schneidet. Dann gilt also

$$2ax_1 - a^2 = y_1 = f(x_1) \geq {x_1}^2$$

und somit

$$(x_1 - a)^2 = {x_1}^2 - 2ax_1 + a^2 \leq 0.$$

Es folgt $x_1 = a$ und damit $f(a) = y_1 = 2a \cdot a - a^2 = a^2$.

Somit ist $f(a) = a^2$ für jede reelle Zahl $a$. □

**Aufgabe O.3** (5 P.)**.** Kann man die Oberfläche eines regelmäßigen Oktaeders ohne Lücken und Überlappungen durch (endlich viele) regelmäßige Sechsecke überdecken? (Ein regelmäßiges Oktaeder hat 6 Ecken, alle Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke und jede Ecke liegt auf 4 Seitenflächen.)

Lösung. Ja, es ist möglich. Zunächst einmal bemerken wir, dass wir von den acht Seitenflächen des Oktaeders vier auswählen können, so dass keine zwei dieser Flächen eine Kante teilen, siehe Abbildung 6.

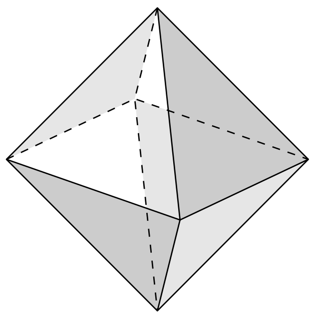

Abbildung 6: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.3.

Jedes solche Dreieck können wir nun mit einem Sechseck überdecken, indem wir jede zweite Ecke des Sechsecks auf eine Ecke des Dreiecks platzieren, siehe Abbildung 7, links.

Über den Rand der Seitenfläche ragt an jeder Kante ein dreieckiges Stück hinaus. Dieses wird nun über die Kante geklappt, so dass es auf der benachbarten Seitenfläche zu liegen kommt. Auf diese Weise wird jede solche Seitenfläche wie in Abbildung 7, rechts von drei Dreiecken überdeckt.

Anhand der Winkel der beteiligten Dreiecke sieht man leicht, dass hierbei keine Überlappung entsteht. □

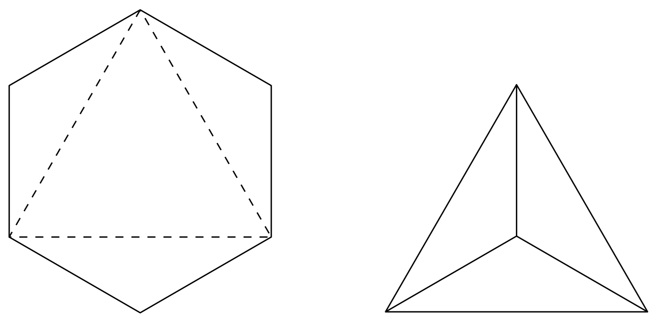

Abbildung 7: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.3.

**Bemerkung.** Die obige Überdeckung ist die Minimallösung mit der geringsten Anzahl an Sechsecken. Es gibt noch unendlich viele andere Möglichkeiten, das Oktaeder zu überdecken.

**Aufgabe O.4** (5 P.)**.** Baron Münchhausen fordert dich auf, ein nicht konstantes Polynom $P(x)$ mit ganzzahligen nichtnegativen Koeffizienten zu wählen und ihm die Werte $P(2)$ und $P(P(2))$ mitzuteilen. Er behauptet, aus diesen zwei Werten stets das Polynom bestimmen zu können. Lügt der Baron?

LÖSUNG. Baron Münchhausen kann das Polynom $P(x)$ aus den Werten $P(2)$ und $P(P(2))$ eindeutig bestimmen. Da das Polynom nicht konstant ist und nichtnegative ganzzahlige Koeffizienten hat, ist $P(2)$ eine positive ganze Zahl größer oder gleich 2, die größer als jeder Koeffizient des Polynoms ist. Daher entsprechen die Koeffizienten des Polynoms den Ziffern von $P(P(2))$ dargestellt zur Basis $P(2)$ (siehe folgende Bemerkung). □

**Bemerkung.** Eine nichtnegative ganze Zahl $n$ wird wie folgt zur Basis einer ganzen Zahl $b \geq 2$ dargestellt: Man sucht eine Gleichung der Form

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0,$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_k$ nichtnegative ganze Zahlen kleiner-gleich $b$ sind. Dann entspricht $n$ dargestellt zur Basis $b$ der Ziffernfolge $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)$. Üblicherweise werden Zahlen zur Basis 10 dargestellt, zum Beispiel gilt: $2010 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 0$.

Es gibt jeweils genau eine Darstellung von $n$ zur Basis $b$. Falls $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$ entspricht die letzte Ziffer $a_0$ dem Rest von $n$ bei der Division durch $b$. $n - a_0$ ist durch $b$ teilbar und $a_1$ entspricht dem Rest von $\frac{n-a_0}{b} = a_k b^{k-1} + a_{k-1} b^{k-2} + \cdots + a_1$ bei der Division durch $b$. $n - a_1 b - a_0$ ist durch $b^2$ teilbar und $a_2$ entspricht dem Rest von $\frac{n-a_1 b-a_0}{b^2} = a_k b^{k-2} + a_{k-1} b^{k-3} + \cdots + a_2$ bei der Division durch $b$ und so weiter. Daher gibt es höchstens eine solche Darstellung (nur diese Aussage wird in der Lösung verwendet). Man kann sich überlegen, dass das beschriebene Verfahren auch tatsächlich eine Darstellung von $n$ zur Basis $b$ liefert. Alternativ beweist man, dass jede nichtnegative ganze Zahl eine Darstellung zur Basis $b$ hat, indem man feststellt, dass 0 die Darstellung (0) hat und dass man aus der Darstellung einer Zahl $m$ auch eine Darstellung der Zahl $m + 1$ erhält. Dazu ersetzt man in der Darstellung von $m$ einfach von hinten alle Ziffern $b - 1$ durch 0 bis man das erste Mal auf eine Ziffer $z$ kleiner als $b - 1$ trifft, die man durch $z + 1$ ersetzt.

**Aufgabe O.5** (6 P.)**.** Eine Nadel liegt in der Ebene. Man darf sie nun um einen ihrer Endpunkte um 45° drehen. Ist es möglich, dass die Nadel nach einigen dieser Rotationen – wobei der Endpunkt, um den gedreht wird, bei jeder Rotation neu gewählt werden darf – wieder exakt ihre ursprüngliche Position einnimmt, ihre Endpunkte aber vertauscht sind? (Die Nadel darf als Strecke angesehen werden.)

LÖSUNG. Es ist nicht möglich, dass die Nadel mit vertauschten Endpunkten wieder exakt ihre ursprüngliche Position einnimmt.

Man darf annehmen, dass der Kopf der Nadel anfangs im Koordinatenursprung liegt und die Spitze im Punkt $(1, 0)$. Die möglichen Orientierungen der Nadel sind also alle *parallel* zu den Koordinatenachsen, 0°, 90°, 180° oder 270°, oder *schräg*, 45°, 135°, 225° oder 315°. Bei parallelen Orientierungen unterscheiden sich die Nadelenden entweder um 1 in der ersten Koordinate oder um 1 in der zweiten. Beide Koordinaten der Nadelenden unterscheiden sich bei schräger Orientierung um $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Wir behaupten, dass der Nadelkopf nicht den Punkt $(1, 0)$ erreichen kann; dann ist es offensichtlich auch nicht möglich, die Nadel mit vertauschten Endpunkten auf ihre Ausgangsposition zu bewegen. Jede Koordinate kann eindeutig als $(a, b) + (c, d) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ mit ganzen Zahlen $a$, $b$, $c$ und $d$ dargestellt werden, da $\frac{\sqrt{2}}{2}$ irrational ist und somit solche Anteile nicht durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können.

Um die Bewegung des Nadelkopfes zu beschreiben, betrachtet man zwei aufeinander folgende Drehungen, erst um den Nadelkopf, dann um die Spitze. (Man darf annehmen, dass die erste Drehung der Nadel um den Nadelkopf vorgenommen wird.) Die Orientierung der Nadel nach jeder dieser beiden Drehungen kann zweimal parallel, zweimal schräg oder einmal parallel und einmal schräg gewesen sein. Dabei ändern sich die Koordinaten des Nadelkopfes wie folgt:

**parallel/parallel** Die Summe der „ganzen Koordinaten“ $a$ und $b$ ändert sich um 0 oder 2.

**parallel/schräg** Die Summe der ganzen Koordinaten ändert sich um 1, beide „irrationalen Koordinaten“ $c$ und $d$ ändern sich um 1.

**schräg/schräg** Jede der beiden irrationalen Koordinaten ändert sich um 0 oder 2.

In jedem Fall ändert sich $a + b + c$ um 0 oder 2, diese Summe ist für die Koordinaten des Nadelkopfes also stets gerade, da sie es in der Ausgangssituation $(a = b = c = d = 0)$ ist.

Somit ist der Punkt $(1, 0)$ für den Nadelkopf nicht erreichbar, da für $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$ gilt

$$a + b + c = 1.$$ □

**Fragen und Anmerkungen.** Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Malte Lackmann, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.