

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.). 100 Piraten spielen Karten. Am Ende des Spiels müssen sie einander mit Goldstaub bezahlen. Jeder Pirat hat genug Goldstaub, um seine Schulden zu bezahlen. Ein Bezahlvorgang funktioniert nun so, dass einer der Piraten entweder an alle anderen Piraten gleich viel Goldstaub verteilt oder von allen anderen gleich viel Goldstaub nimmt. Zeige, dass man immer durch einige solche Vorgänge erreichen kann, dass am Ende jeder Gewinner genau seinen Gewinn erhalten und jeder Verlierer genau seine Schulden bezahlt hat.

Aufgabe 2 (6 P.). Ein Rechteck (welches kein Quadrat ist) sei in N rechteckige (nicht notwendig kongruente) Stücke zerteilt. Zeige, dass man nun alle N Stücke in je 2 Teile zerschneiden und aus den entstandenen $2N$ Teilen ein Quadrat und ein Rechteck zusammen legen kann, wobei beide aus genau N Teilen bestehen.

Aufgabe 3 (7 P.). Es seien ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder und eine Kugel gegeben, so dass die Kugel jede Kante des Tetraeders berührt (aber nicht schneidet). Für je zwei gegenüber liegende Kanten des Tetraeders verbinden wir die Berührungspunkte mit der Kugel durch eine Linie. Zeige, dass sich diese drei Linien in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 4 (9 P.). Mit $[n]!$ bezeichnen wir das Produkt $1 \cdot 11 \cdot \dots \cdot \underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ Stellen}}$.

Zeige, dass $[n + m]!$ immer durch $[n]! \cdot [m]!$ teilbar ist.

Aufgabe 5 (9 P.). Bei einem Dreieck $\triangle XYZ$ und einem konvexen Sechseck $ABCDEF$ seien die Seiten AB und XY parallel und gleich lang, ebenso für die Seiten CD und YZ sowie für EF und ZX . Zeige, dass der Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, welches von den Mittelpunkten der Seiten BC , DE und FA gebildet wird, nicht kleiner ist als der des Dreiecks XYZ .

Aufgabe 6 (12 P.). Olga und Max reisen zu einer Inselgruppe, die aus 2009 Inseln besteht. Zwischen einigen dieser Inseln gibt es Bootsrouen (die Boote fahren dabei in beide Richtungen). Olga und Max spielen auf ihrer Fahrt folgendes Spiel: Olga sucht sich aus, auf welcher Insel sie ihre Reise beginnen. Von nun an reisen sie nur über die vorhandenen Bootsrouen, wobei sie sich abwechselnd aussuchen, zu welcher Insel sie als nächstes reisen. Dabei darf keine Insel mehrfach besucht werden. Max darf zuerst wählen. Wer keine Insel mehr wählen kann (weil alle über eine Bootsroute direkt erreichbaren Inseln bereits besucht wurden), verliert. Zeige, dass Olga bei jeder Verteilung von Bootsrouen so spielen kann, dass sie gewinnt (unabhängig davon wie Max spielt).

Aufgabe 7 (14 P.). Der Eingang einer Höhle wird durch einen drehbaren Tisch versperrt, auf dem N gleich aussehende verschlossene Fässer in gleichen Abständen im Kreis angeordnet sind. Jedes Fass enthält einen Hering, dessen Kopf nach oben oder nach unten deutet. Nun darf Ali Baba einige dieser Fässer (mindestens eines) auswählen und umdrehen. Dann wird der Tisch gedreht, so dass man nicht mehr erkennen kann, welche Fässer zuvor umgedreht wurden. Ali Baba darf nun erneut wählen und so weiter. Der Eingang öffnet sich, sobald die Köpfe aller N Heringe in die gleiche Richtung deuten. Bestimme alle N , für die Ali Baba den Eingang in jedem Fall öffnen kann (in endlich vielen Versuchen).

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden.

Viel Erfolg!