Städtewettbewerb Herbst 2009 Lösungsvorschläge

Hamburg

9. November 2009 [Version 10. Dezember 2009]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (4 P.)**.** Jeder von 10 identischen Krügen enthält etwas Milch, jedoch nicht mehr als 10 Prozent seines Fassungsvermögens. Nun darf man einen Krug auswählen und eine beliebige Menge seiner Milch gleichmäßig auf die anderen Krüge verteilen, danach wiederholt man diesen Vorgang mit einem anderen Krug und so weiter. Beweise, dass man durch höchstens 10 solche Vorgänge erreichen kann, dass alle Krüge gleich viel Milch enthalten.

Lösung. Verteilt man aus jedem Krug (in beliebiger Reihenfolge) $\frac{9}{10}$ seines ursprünglichen Inhalts auf die anderen Krüge, enthält am Ende jeder Krug genau $\frac{1}{10}$ der Gesamtmenge an Milch. $\square$

Aufgabe M.2 (6 P.)**.** Mike hat 1000 identische Würfel. Bei jedem Würfel sind je zwei gegenüber liegende Seiten rot, blau und weiß gefärbt. Mike setzt sie so zu einem großen Würfel ($10 \times 10 \times 10$) zusammen, dass sich zwei benachbarte Würfel immer mit Seiten gleicher Farbe berühren. Zeige, dass es eine Seite des großen Würfels gibt, die vollständig in einer der drei Farben gefärbt ist.

Lösung. Wenn alle Würfel gleich ausgerichtet sind (also ihre roten, blauen beziehungsweise weißen Seiten alle in die gleichen Richtungen weisen), sind offensichtlich alle sechs Seiten des großen Würfels jeweils einfarbig.

Wir können also annehmen, dass nicht alle Würfel gleich ausgerichtet sind. Damit gibt es zwei im großen Würfel benachbarte (also sich berührende) Würfel, die unterschiedlich ausgerichtet sind. Diese beiden Würfel – nennen wir sie A und B – berühren sich mit je einer Seite gleicher Farbe. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass diese Seite rot ist. Betrachten wir nun im großen Würfel die Reihe der 10 Würfel, die A und B enthält. Die beiden Enden dieser Reihe zeigen eine rote Fläche, auf den anderen Seiten kommen sowohl blaue als auch weiße Flächen vor.

Betrachten wir nun eine weitere Reihe von 10 Würfeln, die im großen Würfel genau neben der ersten Reihe verläuft. Diese Reihe enthält einen Würfel C, der zu A benachbart ist, und einen Würfel D, der zu B benachbart ist. Da A und B nicht gleich ausgerichtet sind, berühren sich A und C mit Flächen einer anderen Farbe als B und D. Eines dieser beiden Würfel-Paare berührt sich also mit weißen Flächen, das andere mit blauen Flächen. Somit können sich C und D nur mit roten Flächen berühren.

Hieraus folgt, dass auch die Enden der zweiten Reihe jeweils eine rote Fläche zeigen. Entsprechend erhalten wir, dass dies für jede Reihe von Würfeln gilt, die parallel zu unserer ersten Reihe verläuft. Somit hat der große Würfel mindestens zwei einfarbige (in unserem Fall rote) Seiten. □

Aufgabe M.3 (6 P.)**.** Bestimme alle positiven ganzen Zahlen a und b, für die der Ausdruck $(a + b^2)(b + a^2)$ eine Zweierpotenz ist (also von der Form 2^m für eine ganze Zahl m).

LÖSUNG. Die einzige Lösung ist $a = b = 1$. In diesem Fall ist $(a+b^2)(b+a^2) = 4$, also eine Zweierpotenz. Nehmen wir nun umgekehrt an, a und b seien gegeben, so dass $(a+b^2)(b+a^2)$ eine Zweierpotenz ist. Wir zeigen, dass hieraus $a = b = 1$ folgt.

Das Produkt $(a + b^2)(b + a^2)$ ist genau dann eine Zweierpotenz, wenn beide Faktoren Zweierpotenzen sind, also wenn $a + b^2 = 2^k$ und $b + a^2 = 2^l$ für natürliche Zahlen k, l gilt. Falls $a = b$ gilt, ergibt sich hieraus $a+a^2 = a(1+a) = 2^k$. Dies ist nur für $a = 1$ richtig, da für $a > 1$ immer einer der beiden Faktoren a und $a + 1$ eine ungerade Zahl größer 1 ist. Von nun an nehmen wir an, dass $a \neq b$.

Wir zeigen zunächst, dass a und b beide ungerade sein müssen. Hierfür schreiben wir $a = 2^p \cdot u$ und $b = 2^q \cdot v$ mit ungeraden Zahlen u und v. Da es bei a und b offensichtlich nicht auf die Reihenfolge ankommt, können wir $p \leq q$ annehmen. Dann ist

$$a + b^2 = 2^p u + 2^{2q} v^2 = 2^p \left(u + 2^{2q-p} v^2\right).$$

Falls nicht $p = q = 0$ gilt, so ist $2q - p > 0$ und somit $u + 2^{2q-p}v^2$ ungerade. Dann kann aber nicht $a + b^2 = 2^k$ gelten, also haben wir $p = q = 0$, das heißt, a und b sind ungerade.

Wir können nun $a < b$ annehmen, was $a + b^2 < b + a^2$ und somit $l < k$ zur Folge hat. Nun gilt

$$\begin{aligned} a + b^2 - \left(b + a^2\right) &= b^2 - a^2 - (b - a) \\ &= (b + a)(b - a) - (b - a) \\ &= (b - a)(b + a - 1). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} a + b^2 - \left(b + a^2\right) &= 2^k - 2^l \\ &= 2^l \left(2^{k-l} - 1\right), \end{aligned}$$

also

$$(b - a)(b + a - 1) = 2^l \left(2^{k-l} - 1\right).$$

Insbesondere ist 2^l ein Teiler von $(b - a)(b + a - 1)$. Da $b + a - 1$ ungerade ist, muss 2^l die Differenz $b - a$ teilen, also folgt insbesondere

$$2^l = b + a^2 \leq b - a$$

und somit $a^2 \leq -a$ ein offensichtlicher Widerspruch zu der Tatsache, dass a positiv ist. Damit bleibt als einzige Lösung $a = b = 1$ übrig. □

Aufgabe M.4 (6 P.). Sei $ABCD$ eine Raute. Es werden nun ein Punkt P auf der Seite BC und ein Punkt Q auf der Seite CD gewählt, so dass $|BP| = |CQ|$. Zeige, dass der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle APQ$ immer auf der Diagonalen BD liegt.

LÖSUNG. Neben den in der Aufgabe erwähnten Punkten bezeichnen wir außerdem den Mittelpunkt von AQ mit M und den Schnittpunkt von PM und BD mit X (siehe auch Abbildung 1). Wir zeigen, dass X der Schwerpunkt von APQ ist. Den Abstand von A zur Diagonalen BD bezeichnen wir mit d_A, entsprechend definieren wir auch d_C, d_M, d_P und d_Q. Den Fußpunkt des Lotes von P auf BD nennen wir Y, den Schnittpunkt des Lotes von C auf BD mit der Parallelen zu BD durch Q nennen wir Z.

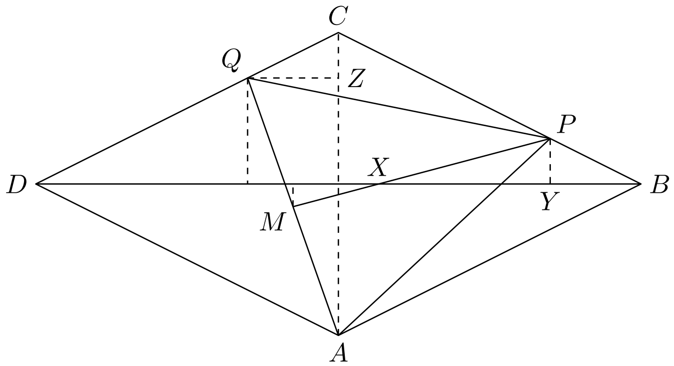

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4.

Die Winkel $\angle CBD$ und $\angle BDC$ sind gleich groß, weil $ABCD$ eine Raute ist. Aus dem gleichen Grund erhalten wir auch $d_A = d_C$. Also sind die Dreiecke $\triangle PYB$ und $\triangle CZQ$ ähnlich. Weil außerdem $|BP| = |CQ|$ gilt, sind sie sogar kongruent und wir haben $d_C - d_Q = d_P$, beziehungsweise $d_Q = d_C - d_P$. Weil M der Mittelpunkt von AQ ist (und A und Q auf unterschiedlichen Seiten von BD liegen), haben wir

$$d_M = \frac{1}{2}\,|d_A - d_Q| = \frac{1}{2}\,|d_A - d_C + d_P| = \frac{1}{2}d_P.$$

Also teilt X die Strecke PM im Verhältnis $2:1$ (Strahlensatz). Da PM eine Seitenhalbierende von APQ ist und der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt, ist X der Schwerpunkt von APQ. □

Bemerkung. Die Aussage, dass der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt, wurde hier als bekannt vorausgesetzt. Sie lässt sich mit dem Strahlensatz beweisen: M_b und M_c seien die Mittelpunkte der B beziehungsweise C gegenüberliegenden Seiten. Dann ist der Schwerpunkt S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden BM_b und CM_c. Nach dem Strahlensatz sind M_bM_c und BC parallel und es gilt $2\,|M_bM_c| = |BC|$. Daher folgt wiederum aus dem Strahlensatz, dass $2\,|SM_b| = |SB|$.

Aufgabe M.5. Gegeben sind N Gewichte von 1 Gramm, 2 Gramm, ..., N Gramm (jedes Gewicht kommt genau einmal vor). Man soll nun einige von ihnen (mehr als eines) auswählen, deren Gesamtgewicht gleich dem Durchschnittsgewicht der restlichen Gewichte ist. Zeige,

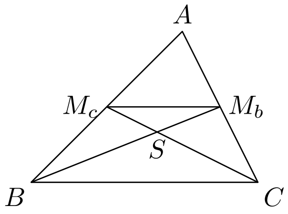

Abbildung 2: Zeichnung zur Bemerkung zu der Lösung von M.4

(a) (2 P.) dass diese Aufgabe immer erfüllt werden kann, falls $N+1$ eine Quadratzahl ist, und

(b) (7 P.) dass umgekehrt $N+1$ immer eine Quadratzahl ist, falls die Aufgabe erfüllt werden kann.

LÖSUNG. Wir lassen im Folgenden die Gewichtseinheit „Gramm“ weg.

(a) Nach Voraussetzung gibt es eine positive ganze Zahl m mit $m^2 = N+1$, also $N = m^2 - 1$. Wir wählen nun die ersten m Gewichte, wobei wir die Gewichte als aufsteigend sortiert annehmen. Das Gesamtgewicht dieser m Gewichte beträgt

$$\frac{m(m+1)}{2} = \frac{m^2+m}{2},$$

es bleibt zu zeigen, dass dies genau dem durchschnittliche Gewicht der restlichen Gewichte entspricht. Da dies lauter aufeinander folgende Gewichte sind, ist ihr Durchschnitt gerade der Mittelwert aus ihrem kleinsten und ihrem größten Gewicht, also

$$\frac{(m+1)+N}{2} = \frac{(m+1)+m^2-1}{2} = \frac{m^2+m}{2}.$$

(b) Sei nun N von der Art, dass wir einige Gewichte, sagen wir m Stück ($m > 1$), wie gefordert auswählen können. Wir zeigen, dass $N+1 = m^2$ gilt.

Unter den m ausgewählten Gewichten sei A das größte Gewicht. Offensichtlich gilt $A < N$, da ansonsten das Gesamtgewicht der ausgewählten Gewichte größer als jedes der restlichen Gewichte – und somit auch größer als ihr Durchschnitt – wäre. Nehmen wir an, es gibt in unserer Auswahl ein weiteres Gewicht $B > 1$, so dass das Gewicht $B-1$ nicht ausgewählt wurde. Wenn wir nun unsere Auswahl ändern, indem wir statt der Gewichte A und B die Gewichte $A+1$ und $B-1$ wählen, ändern wir das Gesamtgewicht unserer m Gewichte (und somit auch das durchschnittliche Gewicht der restlichen Gewichte) nicht. Indem wir unsere Auswahl so lange, wie es möglich ist, auf diese Weise verändern, können wir erreichen, dass unsere Auswahl die ersten $m-1$ Gewichte enthält. Wir haben also die Gewichte $1, \ldots, m-1, A$ ausgewählt.

Wir behaupten, dass $A = m$ gelten muss. Dazu betrachten wir das durchschnittliche Gewicht D der restlichen $N-m$ Gewichte $m, \ldots, A-1, A+1, \ldots, N$. Ihr Gesamtgewicht ist um $A-m$ kleiner als das der Gewichte $m+1, \ldots, N$, also ist D um $\frac{A-m}{N-m}$ kleiner als der Durchschnitt von

$m+1, \ldots, N$, welcher $\frac{N+m+1}{2}$ ist. Ist nun $N-m$ eine gerade Zahl, so ist $N+m+1 = N-m+(2m+1)$ ungerade und somit $\frac{N+m+1}{2}$ um $\frac{1}{2}$ größer als eine ganze Zahl. Damit D eine ganze Zahl ist, muss also $A-m = \frac{1}{2}(N-m)$ gelten, also $2A = N+m$. In diesem Fall ist aber

$$D = \frac{N+m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{N+m}{2} = A$$

und somit D kleiner als das Gesamtgewicht der m ausgewählten Gewichte (welches mindestens $A+1$ ist, da außer dem Gewicht A noch mindestens ein weiteres Gewicht ausgewählt wurde).

Ist andererseits $N-m$ ungerade, ist $\frac{N+m+1}{2}$ eine ganze Zahl und somit D genau dann eine ganze Zahl, wenn $\frac{A-m}{N-m}$ eine ganze Zahl (also 0 oder 1) ist. Da $A < N$ gilt, haben wir $\frac{A-m}{N-m} < 1$, also $\frac{A-m}{N-m} = 0$. Somit gilt $A = m$.

Also haben wir die Gewichte $1, \ldots, m$ ausgewählt. Da ihr Gesamtgewicht nach Teil a dem durchschnittlichen Gewicht der Gewichte $m+1, \ldots, m^2-1$ entspricht, muss $N = m^2-1$ gelten (ansonsten wäre das durchschnittliche Gewicht der restlichen Gewichte zu groß oder zu klein). Also ist $N+1$ eine Quadratzahl.

□

Aufgabe M.6 (10 P.)**.** Auf einem Gitter werden 2009 identische Quadrate derart verteilt, dass ihre Kanten auf den Gitterlinien liegen. Die Quadrate dürfen sich hierbei überlappen. Nun markiert man jedes Gitterkästchen, dass von einer ungeraden Zahl von Quadraten bedeckt wird. Zeige, dass die Zahl der markierten Kästchen mindestens so groß ist wie die Zahl der Kästchen, die ein einzelnes Quadrat überdeckt.

Lösung. Das Quadrat habe die Seitenlänge n und die Kästchen eines Quadrats im Gitter seien mit $1, \ldots, n^2$ durchnummeriert. Die Nummerierung wird periodisch auf das Gitter fortgesetzt, so dass zwei Kästchen mit vertikalem oder horizontalen Abstand n die gleiche Nummer haben.

Jedes der 2009 Quadrate bedeckt somit jede Nummer genau einmal, folglich ist jede Nummer genau 2009 mal bedeckt. Da 2009 ungerade ist, kann es nicht in eine Summe nur gerader Zahlen zerlegt werden. Für jede einzelne Nummer muss also mindestens ein Kästchen durch eine ungerade Anzahl an Quadraten bedeckt sein, also existiert für jede Nummer (mindestens) ein markiertes Kästchen. □

Aufgabe M.7 (14 P.)**.** Olga und Max reisen zu einer Inselgruppe, die aus 2009 Inseln besteht. Zwischen einigen dieser Inseln gibt es Bootsrouten (die Boote fahren dabei in beide Richtungen). Olga und Max spielen auf ihrer Fahrt folgendes Spiel: Olga sucht sich aus, auf welcher Insel sie ihre Reise beginnen. Von nun an reisen sie nur über die vorhandenen Bootsrouten, wobei sie sich abwechselnd aussuchen, zu welcher Insel sie als nächstes reisen. Dabei darf keine Insel mehrfach besucht werden. Max darf zuerst wählen. Wer keine Insel mehr wählen kann (weil alle über eine Bootsroute direkt erreichbaren Inseln bereits besucht wurden), verliert. Zeige, dass Olga bei jeder Verteilung von Bootsrouten so spielen kann, dass sie gewinnt (unabhängig davon wie Max spielt).

Lösung. Bevor die beiden mit der Reise beginnen, sucht Olga sich aus, welche Bootsrouten sie befahren will. Dazu malt sie auf einer Karte der Inselgruppe einige Routen rot an, und zwar derart, dass

(a) keine zwei rote Routen eine Insel als Endpunkt gemeinsam haben und

(b) die Anzahl der roten Routen unter der Bedingung a maximal ist.

Als erste Insel auf der Reise wählt Olga nun eine Insel, an der keine rote Bootsroute endet. Eine solche Insel gibt es, weil jede Bootsroute genau zwei Inseln verbindet und somit die roten Routen insgesamt an einer geraden Anzahl von Inseln enden.

Dann kann Max die nächste Insel auswählen. Dort endet eine rote Bootsroute, denn ansonsten hätte Olga die gerade gefahrene Route ebenfalls rot anmalen können, ohne Bedingung a zu verletzen, was wiederum Bedingung b widerspricht. Also endet an der von Max ausgesuchten Insel eine rote Bootsroute. Olga wählt nun die Insel am anderen Ende dieser Route.

Wenn Max die nächste Insel aussucht, endet dort wieder eine rote Bootsroute, denn anderenfalls hätte Olga mehr Routen anmalen können, indem sie statt der zweiten Route auf der bisherigen Reise (welche eine rote Route war) die beiden anderen Routen angemalt hätte. Also kann Olga erneut die Insel am anderen Ende dieser roten Bootsroute als nächste Insel wählen.

Dies führt sich fort: Max kann nie eine Insel auswählen, an der keine rote Bootsroute endet, denn sonst hätte Olga mehr Routen rot anmalen können, nämlich anstatt der zweiten, vierten, ... Route auf ihrer bisherigen Reise (welche alle rot waren) die erste, dritte, ... Route. Da dies eine Route mehr als zuvor ist, kann Bedingung a nicht erfüllt sein. Also muss an der von Max gewählten Insel immer eine rote Route enden, deren anderes Ende Olga als nächste Insel wählen kann.

Da Olga also immer eine weitere Insel aussuchen kann, endet das Spiel nicht nach einem Zug von Max. Da das Spiel spätestens endet, wenn alle Inseln besucht wurden, kann Max irgendwann nicht mehr ziehen. □

Bemerkung. Hat die Inselgruppe eine andere Größe, gewinnt Olga (mit der gleichen Strategie wie oben) immer dann, wenn die roten Bootsrouten nicht alle Inseln abdecken (insbesondere bei jeder ungeraden Anzahl von Inseln). Gibt es hingegen eine Auswahl von roten Routen, welche alle Inseln trifft, dann kann Max mit der entsprechenden Strategie gewinnen.

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (4 P.)**.** 100 Piraten spielen Karten. Am Ende des Spiels müssen sie einander mit Goldstaub bezahlen. Jeder Pirat hat genug Goldstaub, um seine Schulden zu bezahlen. Ein Bezahlvorgang funktioniert nun so, dass einer der Piraten entweder an alle anderen Piraten gleich viel Goldstaub verteilt oder von allen anderen gleich viel Goldstaub nimmt. Zeige, dass man immer durch einige solche Vorgänge erreichen kann, dass am Ende jeder Gewinner genau seinen Gewinn erhalten und jeder Verlierer genau seine Schulden bezahlt hat.

Lösung. Man kann annehmen, dass jeder Pirat genau so viel Goldstaub besitzt, wie er Schulden hat. (Insbesondere müssen die Piraten, welche Gewinn gemacht haben, zu Anfang keinen Goldstaub haben.) Nun zahlt jeder Pirat mit Schulden genau $\frac{1}{100}$ seiner Schulden an jeden einzelnen anderen Piraten (insgesamt also $\frac{99}{100}$ seiner Schulden). Danach haben alle Piraten gleich viel Goldstaub. Nun nimmt jeder Pirat, der beim Kartenspiel Gewinn gemacht hat, von jedem anderen Piraten genau $\frac{1}{100}$ seines Gewinnes (insgesamt also $\frac{99}{100}$ seines Gewinnes). Danach hat jeder Gewinner genau so viel Goldstaub erhalten, wie er gewonnen hat, und jeder Verlierer hat all seinen Goldstaub bezahlt. □

Aufgabe O.2 (6 P.)**.** Ein Rechteck (welches kein Quadrat ist) sei in N rechteckige (nicht notwendig kongruente) Stücke zerteilt. Zeige, dass man nun alle N Stücke in je 2 Teile zerschneiden und aus den entstandenen $2N$ Teilen ein Quadrat und ein Rechteck zusammen legen kann, wobei beide aus genau N Teilen bestehen.

LÖSUNG. Die Kantenlängen des Rechteckes seien a und b. Da das Rechteck kein Quadrat ist, können wir $a > b$ annehmen. Die Seiten aller Teilrechtecke sind parallel zu den Seiten des großen Rechteckes: Für die Rechtecke, die sich am Rand des großen Rechteckes befinden, ist dies offensichtlich der Fall, somit ebenso für die Nachbarn dieser Rechtecke, für die Nachbarn der Nachbarn und so weiter. Also stimmt die Behauptung für alle Teilrechtecke.

Nun zerschneiden wir jedes der N Teilrechtecke parallel zu der Seite der Länge b und zwar so, dass ein Rechteck der Kantenlängen c und d (wobei die Seite der Länge c zur Seite der Länge a des großen Rechteckes parallel sei) in ein Rechteck der Kantenlängen $\frac{b}{a} \cdot c$ und d sowie eines der Kantenlängen $\left(1 - \frac{b}{a}\right) c$ und d zerfällt. Die neuen Rechtecke der erstgenannten Art kann man nun in genau derselben Weise wie die ursprünglichen N Rechtecke zu einem Quadrat der Kantenlänge b zusammensetzen, die restlichen Rechtecke bilden entsprechend ein Rechteck der Kantenlängen $a - b$ und b. □

Aufgabe O.3 (7 P.)**.** Es seien ein (nicht notwenig regelmäßiges) Tetraeder und eine Kugel gegeben, so dass die Kugel jede Kante des Tetraeders berührt (aber nicht schneidet). Für je zwei gegenüber liegende Kanten des Tetraeders verbinden wir die Berührpunkte mit der Kugel durch eine Linie. Zeige, dass sich diese drei Linien in einem Punkt schneiden.

LÖSUNG. Im Folgenden seien fett gedruckte Buchstaben Vektoren im dreidimensionalen Raum. (Falls jemand eine Lösung ohne Vektoren kennt, sind wir daran interessiert.)

Es seien mit $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ die Ecken des Tetraeders bezeichnet. Um jedes $\mathbf{x}_i$ lässt sich dann eine Kugel vom Radius r_i finden, die genau durch die drei Berührpunkte geht, die auf den drei von $\mathbf{x}_i$ ausgehenden Kanten liegen.

Der Berührpunkt $\mathbf{b}_{ij}$ zwischen $\mathbf{x}_i$ und $\mathbf{x}_j$ berechnet sich zu

$$\mathbf{b}_{ij} = \frac{r_j}{r_i + r_j}\mathbf{x}_i + \frac{r_i}{r_i + r_j}\mathbf{x}_j = \frac{\frac{1}{r_i}}{\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}}\mathbf{x}_i + \frac{\frac{1}{r_j}}{\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}}\mathbf{x}_j.$$

Nun betrachte man den Punkt

$$\mathbf{z} := \frac{\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{r_j}\mathbf{x}_j}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{r_j}}.$$

Er liegt auf der Verbindungsgeraden zwischen $\mathbf{b}_{12}$ und $\mathbf{b}_{34}$ wegen

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_j}}\mathbf{b}_{12}+\frac{\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_j}}\mathbf{b}_{34} &= \frac{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_j}}\left(\frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}\mathbf{x}_1+\frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}\mathbf{x}_2\right)\\ &\quad+\frac{\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_j}}\left(\frac{\frac{1}{r_3}}{\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}}\mathbf{x}_3+\frac{\frac{1}{r_4}}{\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}}\mathbf{x}_4\right)\\ &= \mathbf{z}.\end{aligned}$$

Ganz analog erschließt man, dass $\mathbf{z}$ auch auf den Verbindungsgeraden zwischen $\mathbf{b}_{13}$ und $\mathbf{b}_{24}$, bzw. zwischen $\mathbf{b}_{14}$ und $\mathbf{b}_{23}$ liegt. Also ist $\mathbf{z}$ der gesuchte Schnittpunkt. □

Aufgabe O.4 (9 P.)**.** Mit $[n]!$ bezeichnen wir das Produkt $1 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n\text{ Stellen}}$. Zeige, dass $[n+m]!$ immer durch $[n]! \cdot [m]!$ teilbar ist.

LÖSUNG. Wir definieren die Abkürzungen

$$1_k := \underbrace{1\ldots1}_{k\text{ Stellen}} \qquad \text{und} \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} \text{ für } 0 \le k \le n.$$

Wir zeigen per Induktion über n, dass $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$ immer ganzzahlig ist. Dann ist insbesondere $\left[\begin{smallmatrix} m+n \\ m \end{smallmatrix}\right]$ eine ganze Zahl und somit $[m+n]!$ durch $[n]! \cdot [m]!$ teilbar.

Der Induktionsanfang ist trivial: $[0]!$ ist das leere Produkt, also $[0]! = 1$ und somit $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 1$. Sei die Behauptung nun wahr für ein $n \ge 0$ und alle k mit $0 \le k \le n$. Wir zeigen , dass dann auch $\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix}\right]$ für alle k mit $0 \le k \le n+1$ ganzzahlig ist. Ist $k = 0$ oder $k = n+1$, dann ist offenbar

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n+1]!}{[0]![n+1]!} = 1.$$

Sei also $1 \le k \le n$. Dann ist

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} &= \frac{[n+1]!}{[k]![n+1-k]!} = \frac{[n]! \cdot 1_{n+1}}{[k]![n+1-k]!}\\ &= \frac{[n]!(10^k 1_{n+1-k} + 1_k)}{[k]![n+1-k]!}\\ &= \frac{[n]! \cdot 10^k 1_{n+1-k}}{[k]![n+1-k]!} + \frac{[n]! \cdot 1_k}{[k]![n+1-k]!}\\ &= \frac{[n]! \cdot 10^k 1_{n+1-k}}{[k]![n-k]! \cdot 1_{n+1-k}} + \frac{[n]! \cdot 1_k}{[k-1]![n+1-k]! \cdot 1_k}\\ &= 10^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

und nach Induktionsannahme ist $\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix}\right]$ ganzzahlig. □

ALTERNATIVE LÖSUNG. Es seien m, n vorgegeben. Dann ist

$$\frac{[n+m]!}{[n]!} = \underbrace{11\ldots11}_{n+1\text{ Stellen}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n+m\text{ Stellen}}, \tag{1}$$

Wir müssen also zeigen, dass die rechte Seite durch $[m]!$ teilbar ist. Dazu bemerken wir zuerst, dass für alle positiven ganzen Zahlen a, b die Zahl $\underbrace{11\ldots11}_{a \text{ Stellen}}$ durch $\underbrace{11\ldots11}_{b \text{ Stellen}}$ teilbar ist, sofern a durch b teilbar ist, denn in diesem Fall gilt

$$\underbrace{11\ldots11}_{a \text{ Stellen}} / \underbrace{11\ldots11}_{b \text{ Stellen}} = 1\underbrace{\underbrace{0\ldots01}_{b \text{ Stellen}}\ldots\underbrace{0\ldots01}_{b \text{ Stellen}}}_{\frac{a}{b}-1 \text{ mal}}$$

Wir zeigen nun, dass jede Potenz einer Primzahl p mindestens so viele Faktoren in (1) teilt wie Faktoren von $[m]!$. Ist dies der Fall, teilt p das Produkt $[m]!$ höchstens so oft wie $[n+m]!/[n]!$. Denn bezeichnet x_k die Anzahl der Faktoren von $[m]!$, die p^k teilt (es sind nur endlich viele x_k ungleich Null, x_i sei die letzte dieser Zahlen), sowie y_k die entsprechende Anzahl von Faktoren in (1) (mit y_j die letzte dieser Zahlen, die nicht Null ist, insbesondere $j \geq i$), dann teilt p das Produkt $[m]!$ genau $x_1 + x_2 + \cdots + x_i$ mal und $[n+m]!/[n]!$ genau

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_j \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_i \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_i$$

mal, also mindestens so oft wie $[m]!$.

Seien also p und k gegeben. Wenn keiner der Faktoren von $[m]!$ durch p^k teilbar ist, ist unsere Behauptung offensichtlich wahr, wir dürfen also annehmen, dass einer der Faktoren durch p^k teilbar ist. Dann gibt es (in der Reihenfolge, in der die Faktoren in der Definition von $[m]!$ auftreten) einen letzten Faktor, der durch p^k teilbar ist, sagen wir, den s-ten Faktor. Jede Zahl t zwischen $n+1$ und $n+m$ können wir nun in eindeutiger Weise als $as+r$ schreiben mit $a \geq 0$ und $1 \leq r \leq s$. Teilt p^k also den r-ten Faktor von $[m]!$, finden wir ein t zwischen $n+1$ und $n+m$, so dass p^k auch den t-ten Faktor von $[n+m]!$ teilt. Da der t-te Faktor von $[n+m]!$ auch in (1) auftaucht, haben wir für jeden Faktor von $[m]!$, den p^k teilt, einen entsprechenden Faktor von $[n+m]!/[n]!$ gefunden. □

Aufgabe O.5 (9 P.)**.** Bei einem Dreieck $\triangle XYZ$ und einem konvexen Sechseck $ABCDEF$ seien die Seiten AB und XY parallel und gleich lang, ebenso für die Seiten CD und YZ sowie für EF und ZX. Zeige, dass der Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, welches von den Mittelpunkten der Seiten BC, DE und FA gebildet wird, nicht kleiner ist als der des Dreiecks XYZ.

Lösung. Es seien P, Q und R die Mittelpunkte der Seiten BC, DE bzw. FA (siehe Abbildung 3). Mit $[XYZ]$ bezeichnen wir den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$, analog bezeichnen wir die Flächeninhalte anderer Dreiecke. Wir müssen also zeigen, dass $[PQR] \geq [XYZ]$ gilt.

Dazu machen wir zunächst folgende Beobachtung: Ist P die Ecke eines Dreiecks, dessen andere Ecken M, N weder B noch C sind, dann ist nach dem Strahlensatz die Höhe dieses Dreiecks über der Seite P gerade der Mittelwert der entsprechenden Höhen der Dreiecke $\triangle MNB$ und $\triangle MNC$. Entsprechendes gilt auch für die Punkte Q und R und ihre „Nachbarn“ D und E bzw. F und A.

Geht man also vom Dreieck $\triangle PQR$ aus und ersetzt jede seiner Ecken durch einen seiner „Nachbarn“, dann gibt es hierfür $2^3 = 8$ verschiedene Möglichkeiten und der Flächeninhalt von $\triangle PQR$ ist der Mittelwert der Flächeninhalte aller

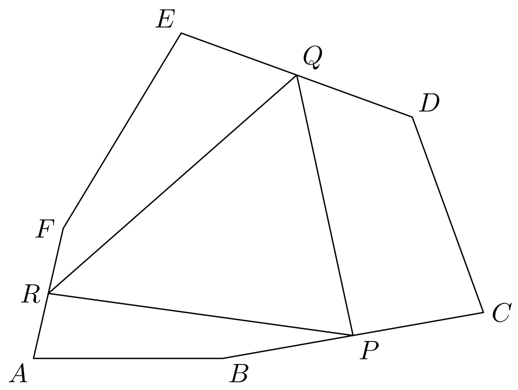

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.5.

dieser Dreiecke. Also

$$[PQR] = \frac{1}{8}\Big([BDF] + [CEA] + [ABD] + [ABE] + [CDF] \\ + [CDA] + [EFB] + [EFC]\Big). \qquad (2)$$

Betrachten wir nun das Dreieck $\triangle ABD$ und nehmen wir an, dass $A = X$ und $B = Y$ gilt und dass Z innerhalb des Dreiecks liegt (siehe Abbildung 4). Laut Aufgabenstellung ist $BCDZ$ ein Parallelogramm und daher ist die Höhe

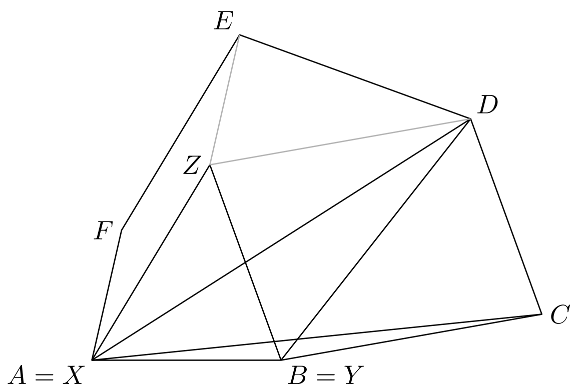

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.5.

des Dreiecks $\triangle ABD$ über der Seite AB gerade die Summe der entsprechenden Höhen der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABZ = \triangle XYZ$. Also gilt für ihre Flächeninhalte $[ABD] = [ABC] + [XYZ]$. Entsprechend erhalten wir $[ABE] = [ABF] + [XYZ]$.

Nehmen wir nun $Y = C$ und $Z = D$ an, so erhalten wir analog $[CDF] = [CDE] + [XYZ]$ und $[CDA] = [CDB] + [XYZ]$, für $Z = E$ und $X = F$ erhalten wir $[EFB] = [EFA] + [XYZ]$ und $[EFC] = [EFD] + [XYZ]$. Setzen wir diese

Gleichungen in (2) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} 8[PQR] &= [BDF] + [CEA] + [ABC] + [ABF] + [CDE] + [CDB] \\ &\quad + [EFA] + [EFD] + 6[XYZ] \\ &= \Big([BDF] + [CDB] + [EFD] + [ABF]\Big) \\ &\quad + \Big([CEA] + [ABC] + [CDE] + [EFA]\Big) + 6[XYZ]. \end{aligned}$$

Weil jede der beiden Klammern dem Flächeninhalt von $ABCDEF$ entspricht (siehe Abbildung 5) und dieser mindestens so groß ist wie $[XYZ]$, denn das

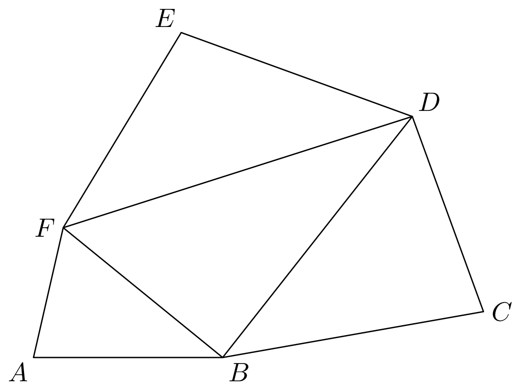

Abbildung 5: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.5.

Dreieck $\triangle XYZ$ ist im Sechseck $ABCDEF$ enthalten (dies folgt daraus, dass $ABCDEF$ konvex ist), folgt hieraus direkt $8[PQR] \geq 8[XYZ]$ und somit $]PQR] \geq [XYZ]$ wie gewünscht. □

Aufgabe O.6 (12 P.)**.** Olga und Max reisen zu einer Inselgruppe, die aus 2009 Inseln besteht. Zwischen einigen dieser Inseln gibt es Bootsrouten (die Boote fahren dabei in beide Richtungen). Olga und Max spielen auf ihrer Fahrt folgendes Spiel: Olga sucht sich aus, auf welcher Insel sie ihre Reise beginnen. Von nun an reisen sie nur über die vorhandenen Bootsrouten, wobei sie sich abwechselnd aussuchen, zu welcher Insel sie als nächstes reisen. Dabei darf keine Insel mehrfach besucht werden. Max darf zuerst wählen. Wer keine Insel mehr wählen kann (weil alle über eine Bootsroute direkt erreichbaren Inseln bereits besucht wurden), verliert. Zeige, dass Olga bei jeder Verteilung von Bootsrouten so spielen kann, dass sie gewinnt (unabhängig davon wie Max spielt).

Lösung. Siehe Aufgabe M.7. □

Aufgabe O.7 (14 P.)**.** Der Eingang einer Höhle wird durch einen drehbaren Tisch versperrt, auf dem N gleich aussehende verschlossene Fässer in gleichen Abständen im Kreis angeordnet sind. Jedes Fass enthält einen Hering, dessen Kopf nach oben oder nach unten deutet. Nun darf Ali Baba einige dieser Fässer (mindestens eines) auswählen und umdrehen. Dann wird der Tisch gedreht, so dass man nicht mehr erkennen kann, welche Fässer zuvor umgedreht wurden. Ali Baba darf nun erneut wählen und so weiter. Der Eingang öffnet sich, sobald die Köpfe aller N Heringe in die gleiche Richtung deuten. Bestimme alle N, für die Ali Baba den Eingang in jedem Fall öffnen kann (in endlich vielen Versuchen).

Lösung. Ali Baba kann den Eingang genau dann öffnen, wenn N eine Zweierpotenz ist.

Nehmen wir zunächst an, dass Ali Baba den Eingang öffnen kann. Das bedeutet, dass er jede mögliche Anfangskonstellation der Heringe mit seinen Auswahlen von Fässern so verändern kann, dass in jedem Fall (also egal, wie der Tisch bei jedem einzelnen Versuch gedreht ist) irgendwann alle Heringe in die gleiche Richtung schauen. Wenn es nun zu jeder Auswahl von Fässern und jeder Konstellation der Heringe eine Drehung des Tisches gäbe, so dass nach Umdrehen der Fässer weiterhin einige Heringe in unterschiedliche Richtungen schauen, dann könnte die Drehung des Tisches in jedem Zug gerade so sein, dass sich der Eingang nicht öffnet. In dem Fall könnte Ali Baba den Eingang nie öffnen.

Also muss es eine Auswahl von Fässern und eine Konstellation der Heringe geben, so dass das Umdrehen dieser Fässer bei dieser Konstellation in jedem Fall den Eingang öffnet, egal wie der Tisch gedreht ist. Offensichtlich werden dabei nicht alle Fässer umgedreht, sonst wäre der Eingang bereits offen. Betrachten wir nun eine bestimmte Drehung des Tisches in dieser Konstellation. Nach Umdrehen der ausgewählten Fässer schauen alle Heringe in die gleiche Richtung. Ist der Tisch um ein Fass gedreht, schauen nach dem Umdrehen ebenfalls alle Heringe in die gleiche Richtung. Durch Drehung der Konstellation geht sie also entweder in sich selbst über – dann hätten aber alle Fässer umgedreht werden müssen – oder in ihr Inverses (also alle Heringe schauen in die entgegengesetzte Richtung). Also schauen die Heringe in dieser Konstellation abwechselnd nach oben und unten. Demnach muss N gerade oder 1 sein.

Wir zeigen nun, dass es auch für $\frac{N}{2}$ Fässer eine Strategie gibt. Dazu schauen wir uns in Ali Babas Strategie für N an, was diese mit jedem zweiten Fass macht (wobei wir an beliebiger Stelle in dem Kreis anfangen zu zählen) und wenden diese „Teilstrategie“ auf unsere $\frac{N}{2}$ Fässer an. Da Ali Babas Strategie für N insbesondere dann funktioniert, wenn unsere „Teilstrategie“ immer auf den gleichen $\frac{N}{2}$ Fässern zu tragen kommt, bringt sie jede mögliche Konstellation dieser Fässer dazu, dass alle Heringe in die gleiche Richtung schauen. Also funktioniert unsere „Teilstrategie“ für $\frac{N}{2}$ Fässer. Da nur bei geraden Anzahlen von Fässern eine Strategie existiert, ist auch $\frac{N}{2}$ gerade oder 1. Also muss N eine Zweierpotenz sein.

Sei nun umgekehrt N eine Zweierpotenz, wir zeigen, dass es eine Strategie bei N Fässern gibt. Für $N = 1$ ist nichts zu tun, da sich der Eingang sofort öffnet. Bei $N = 2$ müssen wir nur einmal ein Fass umdrehen, dann öffnet sich der Eingang. Nehmen wir nun an, dass eine Strategie für $N = 2^k$ existiert, wir zeigen, dass es dann auch eine Strategie für $N = 2^{k+1}$ gibt.

Bei $N = 2^{k+1}$ folgen wir zunächst der Strategie für $N = 2^k$ wie folgt: Zwei gegenüber liegende Fässer drehen wir entweder beide um oder keines von beiden. Wir tun also so, als gäbe es nur 2^k Fässer, indem wir gegenüber liegende Fässer gleich behandeln, und treffen unsere Auswahl unter diesen 2^k Fässern nach der Strategie für $N = 2^k$. Sobald wir mit diesem Vorgehen fertig sind, haben wir jede Konstellation, in der zu Anfang alle Heringe in gegenüber liegenden Fässern in die gleiche Richtung schauen, irgendwann so verändert, dass alle Heringe in die gleiche Richtung geschaut haben. Nun drehen wir 2^k aufeinander folgende Fässer um und durchlaufen erneut die gesamte Strategie für $N = 2^k$. Damit haben wir auch jede Konstellation erledigt, in der zunächst gegenüber liegende Heringe jeweils in entgegengesetzte Richtungen geschaut haben.

Als nächstes nehmen wir die erste Auswahl aus der Strategie für $N = 2^k$ und drehen die ersten 2^k Fässer (wobei wir an einer beliebigen Stelle im Kreis zu zählen beginnen) entsprechend dieser Auswahl um. Die anderen Fässer werden hierbei nicht umgedreht. Danach geht man wieder wie oben vor, man durchläuft also die gesamte Strategie von $N = 2^k$, wobei man gegenüber liegende Fässer gleich behandelt, dann dreht man 2^k aufeinander folgende Fässer um und durchläuft die Strategie erneut. Dann wiederholt man diesen ganzen Vorgang für die zweite Auswahl aus der Strategie für $N = 2^k$ und so weiter.

Bei dieser Strategie öffnet sich der Eingang in jedem Fall: Jede Konstellation der 2^{k+1} Heringe lässt sich dadurch charakterisieren, in welche Richtungen seine ersten 2^k Heringe (erneut an einer beliebigen Stelle begonnen) schauen, sowie welche der dazugehörigen gegenüber liegenden Heringe in die jeweils andere Richtung schauen. Der zweite Teil dieser Charakterisierung ändert sich bei der beschriebenen Strategie immer gerade am Anfang eines Durchlaufs der Strategie für $N = 2^k$. Da die Auswahlen zu Anfang dieser Abschnitte genau der Strategie für $N = 2^k$ entnommen sind, wird in jedem Fall irgendwann der Stand erreicht, dass die Situation für alle Paare von gegenüber liegenden Heringen gleich ist. Schauen diese Paare immer in die gleiche Richtung, werden im Laufe der folgenden Anwendung der Strategie für $N = 2^k$ irgendwann alle Heringe in die gleiche Richtung schauen. Schauen alle Paare jeweils in entgegengesetzte Richtungen, ist dies nach dem Umdrehen der 2^k aufeinander folgenden Fässer und der erneuten Anwendung der Strategie der Fall. $\square$

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Thomas Kecker, Prof. Dr. Helmut Müller, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.