Städtewettbewerb Herbst 2005 Lösungsvorschläge

Hamburg

09. November 2005 [Version 23. März 2006]

Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.) Unter einem Palindrom versteht man eine natürliche Zahl, deren Ziffern von rechts und von links gelesen stets die gleiche Zahl ergeben. So sind z.B. 1, 343 und 2002 Palindrome, dagegen 2005 nicht. Ist es möglich, 2005 Paare der Form $(n, n+110)$ zu finden, wobei n und $n+110$ beides Palindrome sind?

Lösung Es gibt unendlich viele solcher Paare. Sei n von der Form

$$n = 10\,\underbrace{9\ldots9}_{k\text{ Stück}}\,01$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$n + 110 = 11\,\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ Stück}}\,11$$

ebenfalls ein Palindrom. □

Bemerkung Bei den Palindromen n kann die Ziffer 0 auch durch jede beliebige Ziffer außer 9 sowie die Ziffer 1 durch jede beliebige Ziffer außer 0 ersetzt werden.

Aufgabe 2 (5 P.) Die Verlängerungen der Seiten AB und CD eines konvexen (d.h. ohne einspringende Ecke) Vierecks $ABCD$ schneiden sich in dem Punkt K. Ferner ist bekannt, dass die Seiten AD und BC gleich lang sind. Beweise, dass das Dreieck MNK stumpfwinklig sein muss, wobei M und N die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. CD bezeichnen.

Lösung OBdA sei AD die näher bei K gelegene Seite des Vierecks. OBdA sei AB in x-Richtung ausgerichtet.

Es kann nicht $|AB| = |CD|$ gelten, da $ABCD$ ansonsten ein Parallelogramm wäre und sich die Verlängerungen von AB und CD dann nicht schnitten. OBdA sei $|AB| > |CD|$. Da AD näher bei K liegt als BC, muss die y-Koordinate von D kleiner sein als die von C (Zeichnung siehe Abbildung 1). Damit ist die Differenz zwischen den x-Koordinaten von A und D größer als die zwischen den x-Koordinaten von B und C. Hat D eine negative x-Koordinate (OBdA habe A die x-Koordinate 0), so unterscheiden sich C und D bereits in der x-Koordinate mehr als A und B. Somit ist $|CD| > |AB|$, im Widerspruch zur Annahme.

Also hat D eine positive x-Koordinate. Somit ist die x-Koordinate von N (Mittelwert der x-Koordinaten von C und D) größer als die von M und $\angle NMK$ ist ein stumpfer Winkel. □

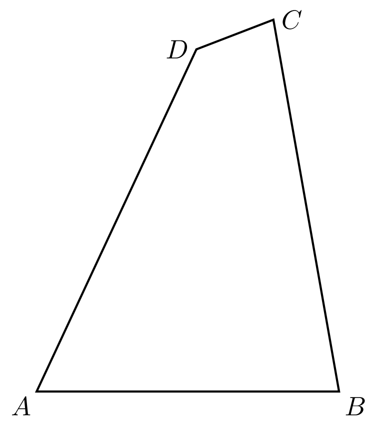

Abbildung 1: Zeichnung zu Lösung 2 der Mittelstufe

Aufgabe 3 (6 P.) Auf jedem der 64 Felder eines Schachbretts steht zu Anfang ein Turm. Es werden nun nacheinander alle die Türme entfernt, die eine ungerade Anzahl von Türmen bedrohen. Wie viele Türme können auf diese Weise höchstens entfernt werden? (Ein Turm bedroht einen anderen Turm, wenn dieser in der gleichen Zeile oder Spalte steht und sich zwischen ihnen kein weiterer Turm befindet.)

LÖSUNG Es können 59 Türme entfernt werden.

Die Türme in den Ecken des Feldes könne nie entfernt werden, da sie stets genau zwei andere Türme bedrohen. Da sich Türme stets gegenseitig bedrohen, ist die Summe der Anzahlen von Türmen, die die einzelnen Türme bedrohen, immer gerade. Sind zu irgendeinem Zeitpunkt noch 5 Türme vorhanden, muss der Turm, welcher nicht in einer der vier Ecken steht, gerade viele andere Türme bedrohen und kann daher nicht entfernt werden. Somit können höchstens 59 Türme entfernt werden.

Eine Möglichkeit, 59 Türme zu entfernen, ist die folgende: Zunächst entferne man nacheinander alle Türme aus der obersten sowie der untersten Zeile bis auf die Türme in den Eckfeldern. Dann entferne man aus der zweiten Zeile sämtliche Türme in der Reihenfolge, welche in Abbildung 2 angegeben ist. In den anderen Zeilen bis auf die vorletzte Zeile gehe man analog vor.

Nun sind noch die vier Eckfelder sowie die vorletzte Zeile besetzt. In der vorletzten Zeile kann man jetzt alle Türme bis auf einen z.B. von links nach rechts entfernen.

Damit hat man 59 Türme entfernt. □

Aufgabe 4 Zwei Ameisen krabbeln entlang der Kanten eines polygonalen Tisches, wobei der Abstand zwischen ihnen immer exakt 10 cm beträgt. Jede Tischkante ist länger als einen Meter. Zu Anfang befinden sich beide Ameisen auf der gleichen Kante.

(a) **(2 P.)** Angenommen, der Tisch ist konvex, d.h. er hat keine einspringende Ecke. Ist es dann immer möglich, dass jede der beiden Ameisen den gesamten Rand des Tisches besucht?

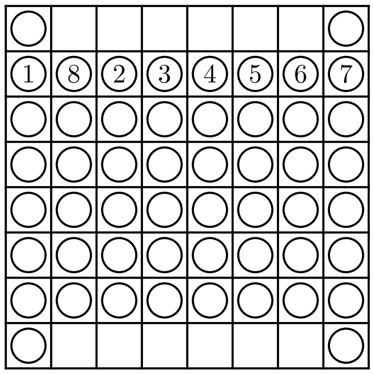

Abbildung 2: Zeichnung zu Lösung 3 der Mittelstufe

(b) **(4 P.)** Angenommen, der Tisch ist nicht notwendigerweise konvex. Ist es dann immer möglich, dass jeder Punkt des Randes von mindestens einer der beiden Ameisen besucht wird?

LÖSUNG (a) Bei einem dreieckigen Tisch mit Seitenlängen von mindestens 1 m, dessen Dreieckshöhe kleiner als 10 cm ist, wie in Abbildung 3, ist dieses nicht möglich.

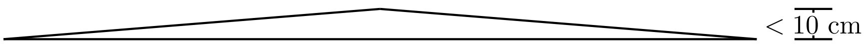

Abbildung 3: Zeichnung des Dreiecks zu Lösung 4 der Mittelstufe

Startet die eine Ameise links von der anderen, bleibt sie auch immer links, kann also nur bis auf 10 cm an die rechte Ecke heran.

(b) Bei einem viereckigen Tisch mit Seitenlängen von mindestens 1 m, dessen Diagonalen (AC und BD) jeweils kleiner als 10 cm sind, wie in Abbildung 4, ist dieses nicht möglich.

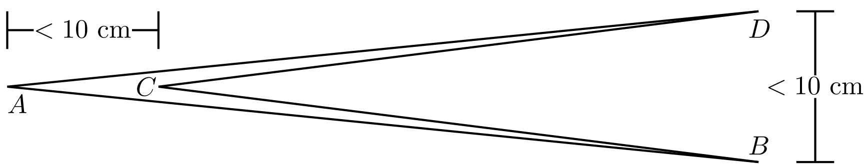

Abbildung 4: Zeichnung des Vierecks zu Lösung 4 der Mittelstufe (nicht maßstabsgetreu!)

Auch hier bleibt die Ameise L, die links von der anderen, R, beginnt, wieder auf der linken Seite. Angenommen beide starten auf AB (alle anderen Fälle gehen genauso), so kann die Ameise R nicht bis zur Ecke A gelangen und damit auch nicht daran vorbei auf AD. Die Ameise L kann auf keiner der (äußeren) Seiten AB und AD die (rechten) Ecken B und D erreichen. Wechselt die Ameise R an der Ecke B auf die Seite BC, so kann sie dort auch nicht zur Ecke C gelangen. Keine der beiden Ameise kann also auf die Seite CD gelangen. □

Aufgabe 5 (7 P.) Finde die größte natürliche Zahl N, für die die Gleichung $99x + 100y + 101z = N$ genau eine Lösung in natürlichen Zahlen x, y, z hat.

Lösung Die größte Zahl mit einer eindeutigen Zerlegung der gewünschten Form ist 5251.

N besitze eine eindeutige Lösung von

$$N = 99x + 100y + 101z, \qquad x, y, z \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dann gelten folgende Beschränkungen von x, y, z.

- $y < 3$, da ansonsten auch $x' = x + 1$, $y' = y - 2$, $z' = z + 1$ eine Lösung von (1) wäre.
- Umgekehrt auch $x = 1$ oder $y = 1$, da ansonsten $x' = x - 1$, $y' = y + 2$, $z' = z - 1$ eine zweite Lösung von (1) wäre.
- $z < 51$, da ansonsten auch $x' = x + 50$, $y' = y + 1$, $z' = z - 50$ eine Lösung von (1) wäre.
- Umgekehrt auch $x < 51$ oder $y = 1$, da ansonsten $x' = x - 50$, $y' = y - 1$, $z' = z + 50$ eine zweite Lösung von (1) wäre.
- $x < 52$, da ansonsten auch $x' = x - 51$, $y' = y + 1$, $z' = z + 49$ eine Lösung von (1) wäre.
- Umgekehrt auch $z < 50$ oder $y = 1$, da ansonsten $x' = x + 51$, $y' = y - 1$, $z' = z - 49$ eine zweite Lösung von (1) wäre.

Die größtmöglichen Werte von x, y, z sind also

$$\begin{array}{lcl}
(x, y, z) = (1, 1, 50) & \Rightarrow & N = 5249 \\
(x, y, z) = (1, 2, 49) & \Rightarrow & N = 5248 \\
(x, y, z) = (51, 1, 1) & \Rightarrow & N = 5250 \\
(x, y, z) = (50, 2, 1) & \Rightarrow & N = 5251
\end{array}$$

Eine größere Zahl als 5251 kann also keine eindeutige Lösung von (1) besitzen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Lösung von (1) für $N = 5251$ eindeutig ist. Ist (x, y, z) eine Lösung von (1), so ergeben sich die letzten beiden Ziffern von N aus dem Wert von $z - x$: Ist $z \geq x$, entsprechen die letzten beiden Ziffern von N den letzten beiden Ziffern von $z - x$. Ist $x > z$, erhält man die letzten beiden Ziffern von N, indem man die letzten beiden Ziffern von $x - z$ von 100 subtrahiert.

Im Fall von $N = 5251$ muss demnach entweder $z \geq x + 51$ oder $x \geq z + 49$ gelten. Im ersten Fall wäre $z \geq 52$, was wegen $101 \cdot 52 > 5251$ nicht möglich ist. Es ist daher $x \geq z + 49$. Ist nun $z \geq 2$, so folgt $x \geq 51$. Da aber $y \geq 1$ gilt, ist dies wegen $99 \cdot 51 + 100 \cdot 1 + 101 \cdot 2 > 5251$ unmöglich. Also ist $z = 1$. Wegen der letzten beiden Ziffern von $N = 5251$ ist nun $x = 50$ ($x = 150$ wäre wegen $99 \cdot 150 > 5251$ bereits zu groß). Aus $99x + 101z = 5051$ folgt nun $y = 2$ und somit ist die Lösung von (1) für $N = 5251$ eindeutig. □

Aufgabe 6 (8 P.) Karlsson lebt auf dem Dach und nennt 1000 Marmeladentöpfe sein Eigen. Die Töpfe sind nicht alle gleich groß, aber kein Topf enthält mehr als 1/100 seines gesamten Marmeladenvorrats. Zum Frühstück wählt Karlsson immer 100 Töpfe aus, wobei er dann aus jedem Topf die gleiche Portion Marmelade entnimmt. Diese Portion kann von Tag zu Tag variieren. Beweise, dass er nach einer gewissen Anzahl von Frühstücken seinen gesamten Marmeladenvorrat verputzt haben kann.

LÖSUNG Um alle Gläser zu leeren, geht Karlsson nach folgendem Grundprinzip vor, wobei stets die Bedingung erhalten bleibt, dass kein Glas mehr als $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge an Marmelade enthält: Solange es noch Gläser mit weniger als $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge an Marmelade gibt, die aber nicht leer sind, wählt er unter diesen ein Marmeladenglas M mit maximalem Inhalt und entnimmt dann (eventuell in mehreren Schritten) den anderen Gläsern gerade so viel Marmelade, dass der Inhalt des Glases M genau $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge beträgt. Dies ist möglich, denn ist m die geringste Menge Marmelade, die in einem nicht leeren Glas enthalten ist, so enthielte M nach der Entnahme von jeweils m Marmelade aus 100 Gläsern außer M entweder mehr als $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge an Marmelade oder nicht. In beiden Fällen wählt Karlsson 100 Gläser außer M, darunter mindestens ein Glas mit Inhalt m. Im ersten Fall entnimmt Karlsson ihnen gerade die Menge Marmelade (jeweils weniger als m), die nötig ist, damit M genau $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge enthält. Im zweiten Fall entnimmt er jedem dieser Gläser die Menge m an Marmelade.

Um sicherzugehen, dass hierbei stets kein Glas mehr als $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge an Marmelade enthält, wird Karlsson bei der Auswahl der 100 Gläser stets alle Gläser nehmen, die bereits genau $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge an Marmelade enthalten. Solange Karlsson noch ein Glas M (welches weniger als $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge enthielt) wählen konnte, gibt es höchstens 99 Gläser, die genau $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge enthalten. Somit ist es stets möglich, die 100 Gläser wie oben auszuwählen. In jedem Schritt steigt nun entweder die Anzahl an Gläsern mit genau $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge oder die Anzahl der leeren Gläser. Daher muss dieses Vorgehen irgendwann zum Ende kommen, nach endlich vielen Schritten gibt es also kein Glas mehr mit weniger als $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge. Dann gibt es genau 100 nicht leere Gläser mit identischem Inhalt, die Karlsson in einem weiteren Frühstück leeren kann. □

Bemerkung Aus dem obigen Vorgehen folgt, dass es nicht nur zur jeder Verteilung der Marmelade eine Anzahl an Tagen gibt, nach denen Karlsson alles aufgegessen hat, sondern eine Anzahl an Tagen, nach denen Karlsson bei *jeder* Verteilung der Marmelade alles aufgegessen hat.

Da vor Ende des Vorgehens kein Glas gleichzeitig leer ist und genau $\frac{1}{100}$ der Gesamtmenge enthält, andererseits aber die Anzahl der Gläser, für die eine der beiden Aussagen gilt, in jedem Schritt steigt, dauert es höchstens 1000 Tage, bis Karlsson kein Glas M wie oben mehr wählen kann. Somit hat Karlsson nach höchstens 1001 Tagen sämtliche Marmelade verputzt.

Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.) Für welche natürlichen Zahlen n gibt es lauter verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$, so dass $a_1/a_2 + a_2/a_3 + \cdots + a_n/a_1$ wieder eine natürliche Zahl ist, und für welche n nicht?

Lösung Dies ist für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ möglich.

Für $n = 1$ kann a_1 beliebig gewählt werden. Für $n \geq 3$ sei $a_i = (n-1)^{i-1}$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} = (n-1)\frac{1}{n-1} + (n-1)^{n-1} = 1 + (n-1)^{n-1} \in \mathbb{N}.$$

Angenommen, es gäbe $a_1 \neq a_2$ mit $a_1/a_2 + a_2/a_1 \in \mathbb{N}$. OBdA seien a_1 und a_2 teilerfremd. Wegen

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2} \in \mathbb{N}$$

muss a_1^2 durch a_2 teilbar sein, im Widerspruch zur Teilerfremdheit. □

Aufgabe 2 Zwei Ameisen krabbeln entlang der Kanten eines polygonalen Tisches, wobei der Abstand zwischen ihnen immer exakt 10 cm beträgt. Jede Tischkante ist länger als einen Meter. Zu Anfang befinden sich beide Ameisen auf der gleichen Kante.

(a) **(2 P.)** Angenommen, der Tisch ist konvex, d.h. er hat keine einspringende Ecke. Ist es dann immer möglich, dass jede der beiden Ameisen den gesamten Rand des Tisches besucht?

(b) **(3 P.)** Angenommen, der Tisch ist nicht notwendigerweise konvex. Ist es dann immer möglich, dass jeder Punkt des Randes von mindestens einer der beiden Ameisen besucht wird?

Lösung Siehe Lösung 4 der Mittelstufe. □

Aufgabe 3 (5 P.) Auf jedem der 64 Felder eines Schachbretts steht zu Anfang ein Turm. Es werden nun nacheinander alle die Türme entfernt, die eine ungerade Anzahl von Türmen bedrohen. Wie viele Türme können auf diese Weise höchstens entfernt werden? (Ein Turm bedroht einen anderen Turm, wenn dieser in der gleichen Zeile oder Spalte steht und sich zwischen ihnen kein weiterer Turm befindet.)

Lösung Siehe Lösung 3 der Mittelstufe. □

Aufgabe 4 (6 P.) Einige positive Zahlen, die alle ≤ 1 sind, werden auf einer Kreislinie verteilt. Beweisen Sie: Man kann stets die Kreislinie so in drei Bögen aufteilen, dass sich die Summen aller Zahlen von je zwei Bögen um höchstens 1 unterscheiden. (Falls auf einem Bogen keine Zahlen markiert sind, so wird diese Summe als 0 gewertet.)

Lösung Wir betrachten Unterteilungen des Kreises, bei denen die Unterteilungspunkte zwischen zwei Zahlen liegen. Hierfür gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, welche sich in den Summen der Zahlen auf den Kreisbögen unterscheiden, es gibt daher eine Unterteilung, bei der die Differenz zwischen der größten Summe der Zahlen auf einem Kreisbogen A und der geringsten Summe (auf einem Kreisbogen B) minimal ist. Ist diese Differenz größer als 1, so betrachte eine Unterteilung, bei der der Unterteilungspunkt zwischen diesen beiden Kreisbögen derart verschoben ist, dass genau eine Zahl von A nach B „wandert". Die Summe der Zahlen auf dem veränderten Kreisbogen A ist kleiner als die Summe von Kreisbogen A vor der Veränderung, aber größer als die Summe von Kreisbogen B vor der Veränderung. Gleiches gilt für Kreisbogen B nach der Veränderung. Nun ist entweder die größte Summe kleiner geworden oder die kleinste Summe größer geworden (der dritte Kreisbogen könnte die gleiche Summe wie einer der beiden anderen Kreisbögen gehabt haben – in diesem Fall hätte sich die größte oder die kleinste Summe nicht verändert – aber eben nur eine der beiden!). Damit ist die Differenz der größten und der kleinsten Summe geringer geworden, im Widerspruch zur Minimalität der ersten Zerlegung. □

Aufgabe 5 (7 P.) In einem Dreieck ABC bezeichnen AA_1, BB_1 und CC_1 die drei Winkelhalbierenden. Ferner sei bekannt, dass sich die Winkel bei A, B und C verhalten wie $4:2:1$. Beweisen Sie, dass dann A_1B_1 und A_1C_1 gleich lang sind.

Lösung Zeichnung siehe Abbildung 5. Zusätzlich zu den in der Aufgabe ge-

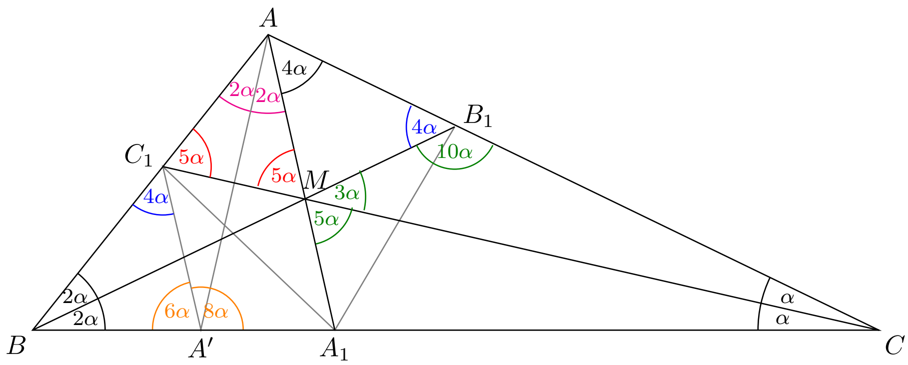

Abbildung 5: Zeichnung zu Lösung 5 der Oberstufe

nannten Punkten bezeichne M den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden sowie A' die Spiegelung von A an der Gerade durch C und C_1. Es sei $\alpha := \frac{1}{14} \cdot 180°$. Die Winkel $\angle A_1AC$, $\angle BAA_1$, $\angle B_1BA$, $\angle CBB_1$, $\angle C_1CB$ und $\angle ACC_1$ folgen direkt aus den Voraussetzungen. Die Winkel $\angle CC_1A$ und $\angle AMC_1$ folgen aus der Winkelsumme in den Dreiecken AC_1C und AC_1M. Da AA' senkrecht auf CC_1 steht, ergeben sich hieraus die Winkel $\angle A'AA_1$ und $\angle BAA'$. Der Winkel $\angle A_1MC$ ergibt sich als Gegenwinkel zu $\angle AMC_1$, die Winkel $\angle BB_1C$ und $\angle CMB_1$ folgen aus der Winkelsumme in den Dreiecken B_1BC und B_1MC. $\angle AB_1M$ ergibt sich als Nebenwinkel von $\angle MB_1C$. Da A' durch Spiegelung von A an der Geraden durch C und C_1 entsteht, folgt $\angle BC_1A' = 180° - 2\angle MC_1A = 4\alpha$. Hiermit ergibt sich $\angle C_1A'B$ aus der Winkelsumme im Dreieck C_1BA' sowie $\angle A_1A'C_1$ als Nebenwinkel von $\angle C_1A'B$.

Nun sind die Dreiecke AMB_1, AC_1M, AC_1A' und C_1BA' gleichschenklig und somit $|MB_1| = |AM| = |AC_1| = |A'C_1| = |BA'|$. Zudem ist das Dreieck ABA_1 gleichschenklig und somit $|AA_1| = |BA_1|$. Hieraus folgt $|A'A_1| = |BA_1| - |BA'| = |AA_1| - |AM| = |MA_1|$.

Insgesamt ergibt sich also $\angle A_1A'C_1 = \angle A_1MB_1$, $|A'C_1| = |MB_1|$ und $|A'A_1| = |MA_1|$. Somit sind die Dreiecke $C_1A'A_1$ und B_1MA_1 kongruent und daher $|A_1B_1| = |A_1C_1|$. □

Aufgabe 6 (8 P.) Man kann auf eine Tafel entweder zwei Einsen schreiben oder zwei identische Zahlen n löschen und sie durch $n+1$ und $n-1$ ersetzen. Wie viele solcher Operationen sind notwendig, um die Zahl 2005 zu erhalten? (Zu Beginn ist die Tafel leer.)

Lösung Neben der Tafel verwenden wir zusätzlich einen *Zettel*, auf den wir jedes Mal, wenn wir an die Tafel die Zahl n schreiben, die Zahl n^2 schreiben und jedes Mal, wenn wir die Zahl n von der Tafel abwischen, die Zahl n^2 wegstreichen. Auf dem Zettel passiert nun Folgendes: wenn wir zwei Einsen an die Tafel schreiben, steigt die Summe auf dem Zettel um $1^2 + 1^2 = 2$; wenn wir auf der Tafel zwei Zahlen n durch $n-1$ und $n+1$ ersetzen, steigt die Summe auf dem Zettel um $-n^2 - n^2 + (n-1)^2 + (n+1)^2 = 2$. Das heißt, wir müssen am Ende nur die Summe auf dem Zettel durch 2 teilen und wissen, wie viele Operationen wir durchgeführt haben.

Nun betrachten wir, welche Zahlen zumindest noch an der Tafel übrig bleiben: jeweils das letzte Mal, dass eine Zahl $n > 1$ erzeugt wird, wird auch die Zahl $n-2$ erzeugt. Kleinere Zahlen muss man aber nur löschen, um größere zu erzeugen, also bleibt $n-2$ bis zum Ende stehen. Ignoriert man nun die Nullen, steht also am Ende zumindest jede Zahl von 1 bis $2005-2$ noch an der Tafel, außerdem natürlich die Zahl 2005. Nach jeder Operation ist die Gesamtsumme der Zahlen an der Tafel gerade, die Summe der eben genannten Zahlen ist jedoch ungerade, so dass mindestens noch eine weitere Zahl an der Tafel stehen muss, bestenfalls eine 1.

Ist diese Situation wirklich erreichbar, so können wir die Gesamtzahl der Operationen leicht als Hälfte der Summe der Zahlen auf unserem Zettel ablesen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(2005^2 + (2003^2 + 2002^2 + \cdots + 2^2 + 1^2) + 1^2\right) \\
=&\frac{1}{2}\left(2005^2 + \frac{2003 \cdot (2003+1) \cdot (2 \cdot 2003 + 1)}{6} + 1^2\right) \\
=&\frac{1}{2}(4020025 + 2680691014 + 1) = 1342355520.
\end{aligned}$$

Die angegebene Situation ist auch wirklich erreichbar, indem man iterativ vorgeht, wobei Einsen ignoriert werden, die man genau dann erzeugt, wenn man sie braucht: hat man die entsprechende Situation für die Zahl $n-1$ erreicht, also die Zahlen $2, \ldots, n-3, n-1$ an der Tafel, erzeugt man sich eine weitere 2 und dann jeweils aus der Zahl m, die man doppelt hat, $m-1$ und $m-2$. Man hat dann $2, \ldots, n-2, n-4, n-2, n-1$, was bis auf die $n-1$ genau die Situation beim ersten Erzeugen von $n-2$ war, aus der man auf genau die gleiche Weise wieder die Situation von $n-1$ erzeugt. Damit hat man dann $2, \dots, n-3, n-1, n-1$ und erreicht in einem weiteren Schritt die gewünschte Situation für n. $\square$

Fragen und Anmerkungen Schicken Sie diese bitte an Prof. Dr. Helmut Müller <mueller@math.uni-hamburg.de>. An den Lösungen haben außerdem mitgewirkt: Klaus Sielaff, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.