26. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 11. März 2005

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [4 Punkte]

Auf dem Graphen eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten werden zwei Punkte mit ganzzahligen Koordinaten gewählt. Zeigen Sie, dass die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten parallel zur x-Achse verlaufen muss, wenn diese beiden Punkte einen ganzzahligen Abstand voneinander haben.

Aufgabe 2: [5 Punkte]

Ein Kreis W_1 geht durch den Mittelpunkt eines Kreises W_2. Zeichnen wir von einem Punkt C auf W_1 die Tangenten an W_2, so schneiden sie W_1 ein zweites Mal in den Punkten A bzw. B. Zeigen Sie, dass die Gerade durch AB senkrecht auf der Verbindungsgeraden durch die beiden Kreismittelpunkte steht.

Aufgabe 3: [5 Punkte]

John und James wollen durch ein Spiel die vor ihnen liegenden 25 Münzen zu 1 Cent, 2 Cent, ..., 25 Cent unter sich aufteilen. Bei jedem Schritt wählt einer eine Münze, während der andere bestimmen kann, wer sie bekommt. John beginnt. Immer der, der bereits die meisten Cent erhalten hat, wählt die nächste Münze. Haben beide gleichviel, so wählt der letzte erneut. Kann John so spielen, dass er am Ende mehr Cent erhalten hat als James, oder kann James dies stets verhindern?

Aufgabe 4: [6 Punkte]

Gibt es ein quadratisches Polynom $f(x)$, so dass für jede natürliche Zahl n die Gleichung

$$f\big(f(\dots f(x)\dots)\big) = 0$$

(„f“ erscheint genau n-mal) exakt 2^n verschiedene reelle Nullstellen hat?

Aufgabe 5: [7 Punkte]

Ein Ikosaeder und ein Dodekaeder sind einer Kugel einbeschrieben, d.h. alle Eckpunkte liegen auf einer Kugeloberfläche. Zeigen Sie, dass sie auch ein und dieselbe Kugel umschreiben, d.h. alle Flächen tangieren. (Zur Erinnerung: Ein Ikosaeder hat 20 Flächen, die sämtlich kongruente gleichseitige Dreiecke sind, wobei in jeder Ecke 5 Flächen zusammentreffen und die Winkel, unter denen zwei Dreiecke entlang einer Kante zusammenstoßen, sind überall gleichgroß. Ein Dodekaeder hat 12 Flächen, die sämtlich kongruente regelmäßige Fünfecke sind, wobei in jeder Ecke 3 Flächen zusammentreffen und die Winkel, unter denen zwei Fünfecke entlang einer Kante zusammenstoßen, sind überall gleichgroß.)

Aufgabe 6: [7 Punkte]

Es bezeichne A ein Eckquadrat eines Schachbretts und B sein diagonales Nachbarquadrat. Zeigen Sie, dass die Anzahl der in A beginnenden Wege des „lahmen Turms“ größer ist als die Anzahl seiner in B beginnenden Wege. Bei einem Weg besucht der „lahme Turm“ jedes der 64 Quadrat genau einmal, wobei er aber jedesmal nur zum horizontal oder vertikal benachbarten Quadrat übergehen darf.

Aufgabe 7:

Im Raum seien 200 Punkte gewählt. Je zwei werden durch Strecken verbunden, die sich niemals schneiden. Jede dieser Strecken wird nun mit einer von k gegebenen Farben gefärbt. Nun möchte Peter die 200 Punkte ebenfalls mit einer der gegebenen Farben färben, allerdings so, dass kein Paar genau so wie die sie verbindende Strecke gefärbt wird. Kann Peter dies stets bewerkstelligen, wenn

a) [4 Punkte] $k = 7$ bzw.

b) [4 Punkte] $k = 10$ ist?

Alle Aussagen und Feststellungen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. **Viel Erfolg !**