

24. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, Herbst 2002

MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [4 Punkte]

Man denke sich 2002 Punkte auf einem Kreis angeordnet. Durch Verbinden der benachbarten Punkte entsteht ein 2002-Eck (Polygon). Nun seien in dem Polygon so viele Diagonalen, von denen sich keine zwei im Innern schneiden, eingetragen, dass das Polygon in genau 2000 Dreiecke zerlegt wird. Kann es sein, dass genau die Hälfte dieser Dreiecke nur Diagonalen als Seiten hat?

Aufgabe 2: [5 Punkte]

John und Mary denken sich je eine natürliche Zahl aus, die sie Bill vertraulich mitteilen. Bill schreibt die Summe und das Produkt dieser beiden Zahlen auf je ein Blatt Papier. Ein Blatt hält er verdeckt, das andere zeigt er den beiden (auf ihm ist die Zahl 2002 notiert). John schaut sich die Zahl an und erklärt, dass er nicht wisse, welche Zahl Mary sich ausgedacht hat. Mary hört diese Aussage und erklärt dann ihrerseits, dass sie auch nicht wisse, welche Zahl sich John ausgedacht hat. Welche Zahl hat sich Mary ausgedacht?

Aufgabe 3:

- a) [1 Punkt] In einer Klasse wird eine Examensarbeit geschrieben. Dabei ist bekannt, dass mindestens zwei Drittel der Fragen schwer sind, d.h. jede dieser Fragen wird von mindestens zwei Dritteln der Schüler nicht richtig beantwortet. Es ist außerdem bekannt, dass mindestens zwei Drittel der Schüler das Examen bestehen, d.h. jeder von ihnen beantwortet mindestens zwei Drittel aller Fragen richtig. Ist das möglich?
- b) [2 Punkte] Fällt Deine Antwort genauso aus, wenn an allen Stellen „zwei Drittel“ durch „drei Viertel“ ersetzt wird?
- c) [2 Punkte] Fällt Deine Antwort genauso aus, wenn an allen Stellen „zwei Drittel“ durch „sieben Zehntel“ ersetzt wird?

Aufgabe 4: [5 Punkte]

Es liegen 2002 Karten, die mit den Zahlen $1, 2, \dots, 2002$ beschriftet sind, offen auf einem Tisch. Zwei Spieler ziehen abwechselnd eine Karte, bis alle Karten gezogen sind. Gewonnen hat dann derjenige, dessen Zahlen aufaddiert die größere Einerziffer ergeben. Begründe, welcher der Spieler gewinnen kann (unabhängig, welche Karten der andere zieht) und erlautere seine Strategie.

Aufgabe 5: [5 Punkte]

Ein Winkel mit einem inneren Punkt A ist gegeben. Kann man drei Geraden so durch A legen, dass für jeden Schenkel des Winkels gilt: Von den drei Schnittpunkten der Geraden mit diesem Schenkel ist einer der Mittelpunkt der beiden anderen?

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben. Alle Aufgaben haben die gleiche Punktzahl.

Zeit: 4,5 Stunden.

Viel Erfolg !