

Zusammenfassung S Sprache: Konst., Funkt., Rel.-Symbole und Var.
 φ ein S -Formel oder S -Ausdruck def. man induktiv n.L.
 S-Terme und \equiv , Rel. Symbole und $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

DEF: φ ist ein S -Satz
 wenn φ keine freie Variablen enthält.

ZB: $\forall x \forall y (\dot{R}(x,y) \rightarrow \dot{R}(y,x))$ ist ein Satz, aber
 $\forall y (\dot{R}(x,y) \rightarrow \dot{R}(y,x))$ nicht.

DEF: Eine S -Struktur ist $\mathfrak{A} = (A, \underbrace{\text{Konst.}}_{\text{Untersetzung}}, \underbrace{f^A}_{\text{Funkt.}}, \underbrace{R^A}_{\text{Rel.}})$

Idee: $\mathfrak{A} \models \varphi$ soll heißen " φ gilt in \mathfrak{A} "
 Wenn φ ein Satz ist, dann ist \mathfrak{A} anprechend.
 Wenn φ aber kein Satz ist, brauchen wir auch eine Variaablenbelegung: $\beta: \text{Var}(S) \rightarrow A$

Def: Eine S -Interpretation ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$

Idee: $\mathfrak{I} \models \varphi$ heißt " φ gilt in \mathfrak{A} , wobei die Variablen durch β int. werden"

Def. (i) Sei t ein S -Term
 $\mathfrak{I}(t) := \begin{cases} \beta(x) & \text{wenn } t = x \\ \dot{c}^A & \text{wenn } t = \dot{c} \\ \dot{f}^A(t_1, \dots, t_n) & \text{wenn } t = \dot{f}(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$

(ii) $\mathfrak{I} \models \varphi$:
 $\mathfrak{I} \models (t_1 = t_2) \quad \text{gdw } \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
 $\mathfrak{I} \models \dot{R}(t_1, \dots, t_n) \quad \text{gdw } (\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)) \in \dot{R}$
 $\mathfrak{I} \models \neg \varphi \quad \text{gdw } \mathfrak{I} \not\models \varphi \quad (\text{nicht } \mathfrak{I} \models \varphi)$
 $\mathfrak{I} \models \varphi \wedge \psi \quad \dots$
 $\mathfrak{I} \models \varphi \vee \psi \quad \dots$
 $\mathfrak{I} \models \varphi \rightarrow \psi \quad \dots \text{ und } \mathfrak{I} \models \varphi \leftrightarrow \psi$

Idee: $\mathfrak{I} \models \forall x \varphi$ gdw für jeden $a \in A$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$
 $\mathfrak{I} \models \exists x \varphi \quad \text{gdw es gibt ein } a \in A, \text{ so dass } \mathfrak{I} \models \varphi$

Beispiel: $S = \text{Gruppensprache}, \mathfrak{A} = (R, +, 0), \beta(x) = 3$
 $\mathfrak{I} \models x + 0 = x$
 $\Leftrightarrow \mathfrak{I}(x + 0) = \mathfrak{I}(x)$
 $\Leftrightarrow \mathfrak{I}(x) + \mathfrak{I}(0) = \mathfrak{I}(x)$
 $\Leftrightarrow 3 + 0 = 3$

Wann: Wenn Φ Menge von S -Formeln ist, dann $\mathfrak{I} \models \Phi$ gdw $\mathfrak{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$

Beispiel: $\mathfrak{I} \models \forall x (x + 0 = x)$
 liegt $\forall x \forall R \quad R + 0 = R$ vor

Bemerkung: Wenn φ ein Satz ist, sind Belegungen irrelevant, also schreibt man $\mathfrak{A} \models \varphi$

Bemerkung 2: Sätze beschreiben die Struktur
 $\text{z.B. } \varphi \equiv \forall x \forall y (x + y = y + x) \wedge \forall x (x + 0 = x) \wedge \forall x \exists y (x + y = 0)$

Dann ist: $\mathfrak{I} \models \varphi$ gdw \mathfrak{I} eine Gruppe ist.

Beispiel: $S = \{R\}$
 $\varphi = \forall x R(x,x) \wedge \forall x \forall y (\dot{R}(x,y) \wedge \dot{R}(y,x) \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$
 Dann ist $(A, R) \models \varphi$ gdw R eine Ordnungsrel. ist auf A .

3.4. Folgerungsbeziehung
Beispiel: Φ_{Gr} sind die Gruppenaxiome und sei φ irgendeine S -Formel
 Wann folgt φ aus Φ_{Gr} ?

Axiom 1: Wenn φ sich aus Φ_{Gr} "logisch ableiten" lässt (in endlichen Schritten)

Axiom 2: Wenn φ durch alle Gruppen erfüllt wird (Hilfe!)

Daf: Sei Φ eine Menge S -Formel und φ S -Formel
 Dann sagen wir " φ folgt aus Φ ", $\Phi \models \varphi$
 gdw für alle S -Interpretationen \mathfrak{I} gilt:
 wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$ dann $\mathfrak{I} \models \varphi$

Frage: Gilt immer $\Phi \models \varphi$ oder $\Phi \models \neg \varphi$? NEIN, z.B. Φ_{Gr} und $\neg \forall x \forall y (xy = yx)$

Frage: Gilt immer $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \neg \varphi$? JA (per Def.)

DEF: (i) φ heißt allgemeingültig gdw alle $\mathfrak{I} \models \varphi$

(ii) φ heißt erfüllbar gdw es \mathfrak{I} gibt, so dass $\mathfrak{I} \models \varphi$

(iii) φ und ψ sind logisch äquivalent gdw $\mathfrak{I} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \psi$

2

Aufgabe: φ ist allgemeingültig $\Leftrightarrow \Phi \models \varphi$
 $\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \cup \{\neg \varphi\}$ nicht erfüllbar ist

Bemerkung: Da jede S-Formel logisch äquivalent ist an eine S-Formel die nur \wedge, \neg, \exists enthält, können wir z.B.d.h. annehmen, daß die Sprache nur \wedge, \neg, \exists als logische Symbole enthält. ($\forall x \varphi \Leftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi$)

Konkurrenzlemma

Idee: Als wir $\mathcal{J} \models \varphi$ definiert haben, war immer die Sprache S festgelegt

Lemma: " $\mathcal{J} \models \varphi$ hängt nur von den S-Symbolen ab, die in φ vorkommen"

Formal: Seien S_1 und S_2 zwei Sprachen und $S = S_1 \cup S_2$
Seien \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 S_1 - bzw. S_2 -Strukturen,
 β_1, β_2 \mathcal{A}_1 - bzw. \mathcal{A}_2 -Befragungen, und $A_1 = A_2$

Dann gilt

(a) Sei t ein S-Term. Wenn
 $\mathcal{J}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ und $\mathcal{J}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$
auf allen in t vorkommenden Symbolen übereinstimmen,
dann $\mathcal{J}_1(t) = \mathcal{J}_2(t)$

(b) Sei φ S-Formel. Wenn \mathcal{J}_1 und \mathcal{J}_2 auf allen in φ vorkommenden Symbolen übereinstimmen,
dann $\mathcal{J}_1 \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{J}_2 \models \varphi$

Beweis: Aufgabe!
(a) Induktion nach Höhen der Terme
(b) Induktion nach Höhen der Formeln

3

3.5: Isomorphismen und Substrukturen

DEF: Seien A und B S-Strukturen. Dann ist $\pi: A \rightarrow B$ ein isomorphismus wenn

- (1) π Bijektion zwischen A und B
- (2) $\pi(\dot{c}^A) = \dot{c}^B$ für alle Konst in S
- (3) $(a_1, a_n) \in \dot{R}^A$ gdw. $(\pi(a_1), \pi(a_n)) \in \dot{R}^B$ für alle R-Symb in S
- (4) $\pi(\dot{f}^A(a_1, a_n)) = \dot{f}^B(\pi(a_1), \pi(a_n))$ für alle Fkt-Symb in S

Satz: Wenn A und B isomorph sind, dann gilt für jeden Satz φ
 $A \models \varphi \Leftrightarrow B \models \varphi$

Beweis: Eigentlich beweisen wir einen stärkeren: für alle S-Formeln φ und alle Befrag. β gilt

$$(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \Leftrightarrow (B, \pi \beta) \models \varphi$$

Beweis: Sei $\mathcal{J} = (\mathcal{A}, \beta)$ und $\mathcal{J}' = (B, \pi \beta)$

- (a) Zeige zuerst: $\pi(\mathcal{J}(t)) = \mathcal{J}'(t)$ für alle S-Terme
- (b) Danach: $\mathcal{J} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{J}' \models \varphi$.

$$\begin{aligned} \text{Zu (a):} \quad & \text{Wenn } t = x: \pi(\mathcal{J}(x)) = \pi(\beta(x)) = \pi(\beta(x)) = \mathcal{J}'(t) \\ & \text{Wenn } t = c: \pi(\mathcal{J}(c)) = \pi(\dot{c}^A) = \dot{c}^B = \mathcal{J}'(c) \\ & \text{Wenn } t = f(t_1, t_n): \pi(\mathcal{J}(f(t_1, t_n))) = \\ & \quad \stackrel{\text{Def. } \pi}{=} \pi(f^A(\mathcal{J}(t_1), \mathcal{J}(t_n))) = \\ & \quad \stackrel{\text{Von }}{=} f^B(\pi(\mathcal{J}(t_1)), \pi(\mathcal{J}(t_n))) = \\ & \quad \stackrel{\text{IH}}{=} f^B(\mathcal{J}'(t_1), \mathcal{J}'(t_n)) = \mathcal{J}'(f(t_1, t_n)) \end{aligned}$$

Zu (b). morgen!

4