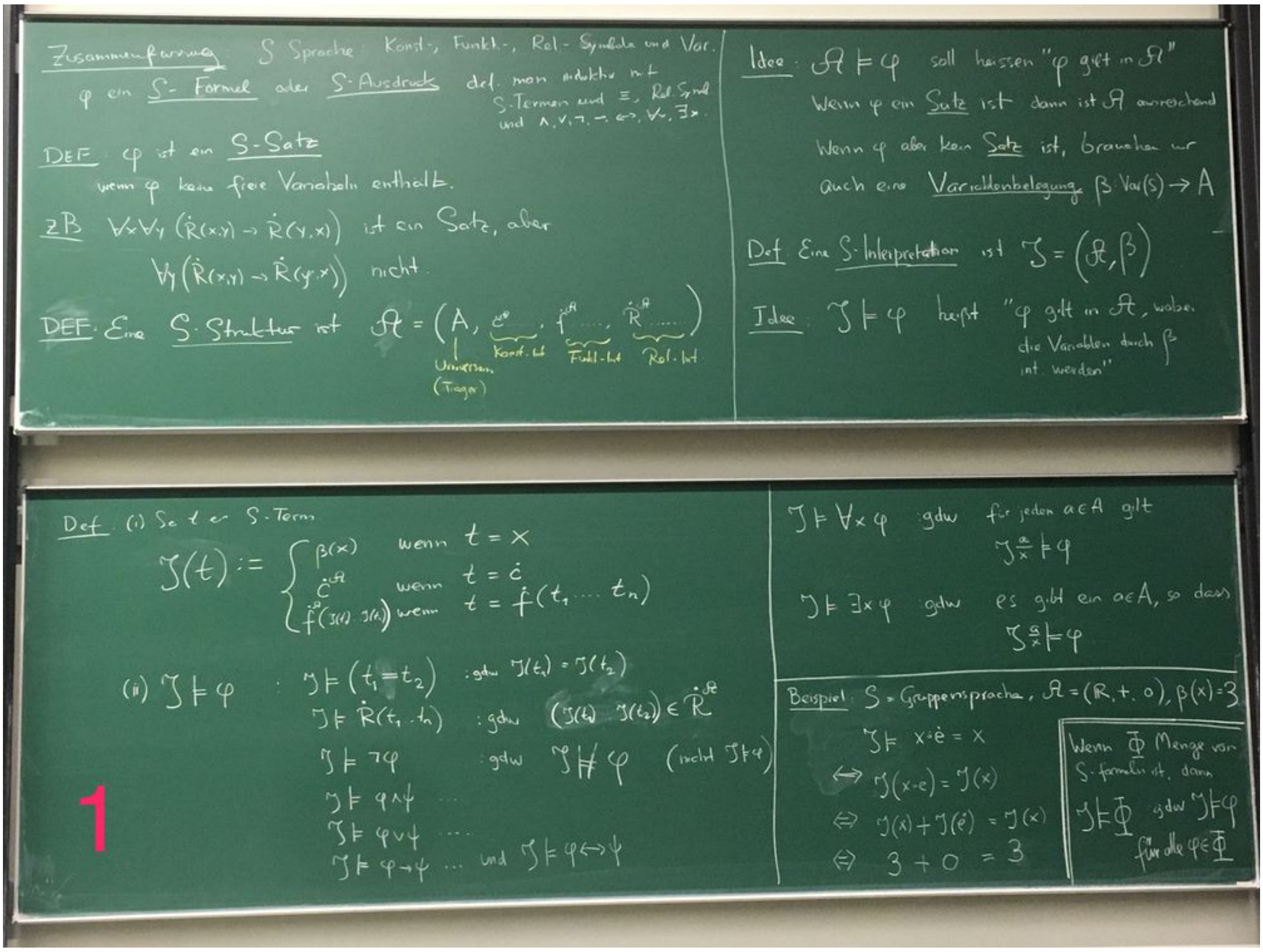
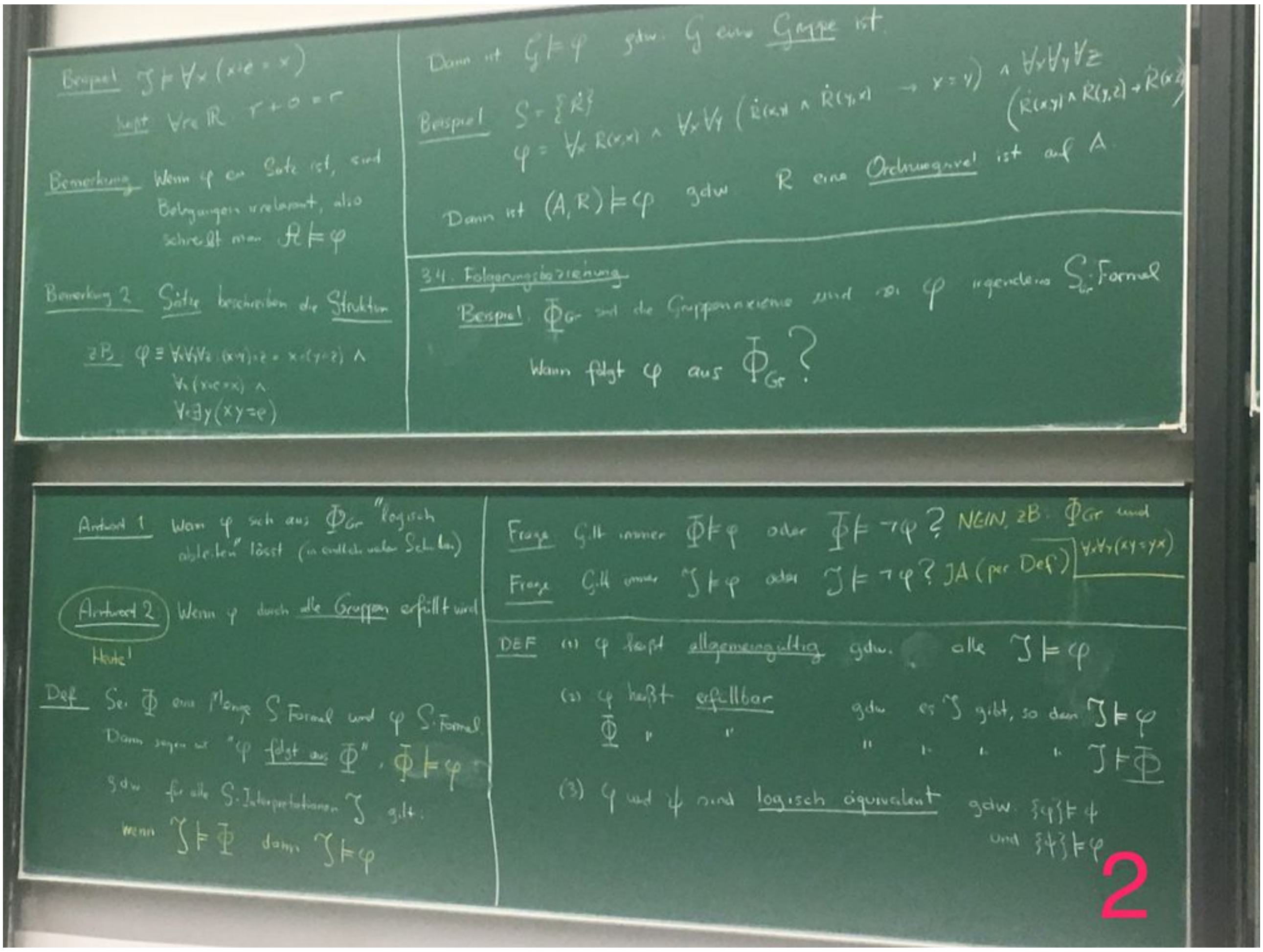
Mathematische Logik & Mengenlehre, Fünfte Vorlesung
Dr. Yurii Khomskii, 17. April 2018





Aufgabe: φ ist allgemeingültig gdw $\emptyset \models \varphi$

$\models \varphi$

$\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ nicht erfüllbar ist

Bemerkung: Da jede S-Formel logisch äquivalent ist an eine S-Formel die nur $\wedge, \neg, \exists$ enthält, können wir oBdA. annehmen, daß die Sprache nur $\wedge, \neg, \exists$ als logisch Symbole enthält. ($\forall x \varphi$ äquiv $\neg \exists x \neg \varphi$)

Koinzidenzlemma

Idee: Als wir $\mathfrak{I} \models \varphi$ definiert haben, war immer die Sprache S festgelegt

Lemma "$\mathfrak{I} \models \varphi$ hängt nur von den S-Symbolen ab, die in φ vorkommen"

Formal: Seien S_1 und S_2 zwei Sprachen und $S = S_1 \cap S_2$

Seien $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ S_1- bzw. S_2-Strukturen,

β_1, β_2 $\mathfrak{A}_1$- bzw. $\mathfrak{A}_2$-Belegungen, und $A_1 = A_2$

Dann gilt

(a) Sei t ein S-Term. Wenn $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ und $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ auf allen in t vorkommenden Symbolen übereinstimmen, dann $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$

(b) Sei φ S-Formel. Wenn $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ auf allen in φ vorkommenden Symbolen übereinstimmt, dann $\mathfrak{I}_1 \models \varphi \iff \mathfrak{I}_2 \models \varphi$

Beweis: Aufgabe!

(a) Induktion nach Aufbau der Terme

(b) Induktion nach Aufbau der Formeln

3

3.5 Isomorphismen und Substrukturen

DEF: Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ S-Strukt. Dann ist $\pi\ A \to B$ ein isomorphismus wenn

(1) π Bijektion zwischen A und B

(2) $\pi(\dot{c}^{\mathfrak{A}}) = \dot{c}^{\mathfrak{B}}$ für alle Konst in S

(3) $(a_1 \dots a_n) \in \dot{R}^{\mathfrak{A}}$ gdw $(\pi(a_1) \dots \pi(a_n)) \in \dot{R}^{\mathfrak{B}}$ für alle R-Symb in S

(4) $\pi(\dot{f}^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)) = \dot{f}^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1) \dots \pi(a_n))$ für alle Funkt-Symb. in S

Satz: Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph sind, dann gilt für jeden Satz φ

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$$

Beweis: Eigentlich beweisen wir etwas stärkeres: für alle S-Formeln φ und alle Beleg. β gilt

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{B}, \pi \circ \beta) \models \varphi$$

Beweis Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ und $\mathfrak{I}^\pi := (\mathfrak{B}, \pi \circ \beta)$

(a) Zeige zuerst $\pi(\mathfrak{I}(t)) = \mathfrak{I}^\pi(t)$ für alle S-Terme

(b) Danach $\mathfrak{I} \models \varphi \iff \mathfrak{I}^\pi \models \varphi$.

Zu (a):

- Wenn $t = x$: $\pi(\mathfrak{I}(x)) = \pi(\beta(x)) = \pi \circ \beta(x) = \mathfrak{I}^\pi(t)$
- Wenn $t = c$: $\pi(\mathfrak{I}(c)) = \pi(\dot{c}^{\mathfrak{A}}) = \dot{c}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{I}^\pi(\dot{c})$
- Wenn $t = f(t_1 \dots t_n)$: $\pi(\mathfrak{I}(f(t_1 \dots t_n))) =$

$$\overset{\text{Def}}{=} \pi(f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_n))) =$$

$$\overset{\text{Isom}}{=} f^{\mathfrak{B}}(\pi(\mathfrak{I}(t_1)) \dots \pi(\mathfrak{I}(t_n))) =$$

$$\overset{\text{IH}}{=} f^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{I}^\pi(t_1) \dots \mathfrak{I}^\pi(t_n)) = \mathfrak{I}^\pi(f(t_1 \dots t_n))$$

Zu (b). morgen!

4