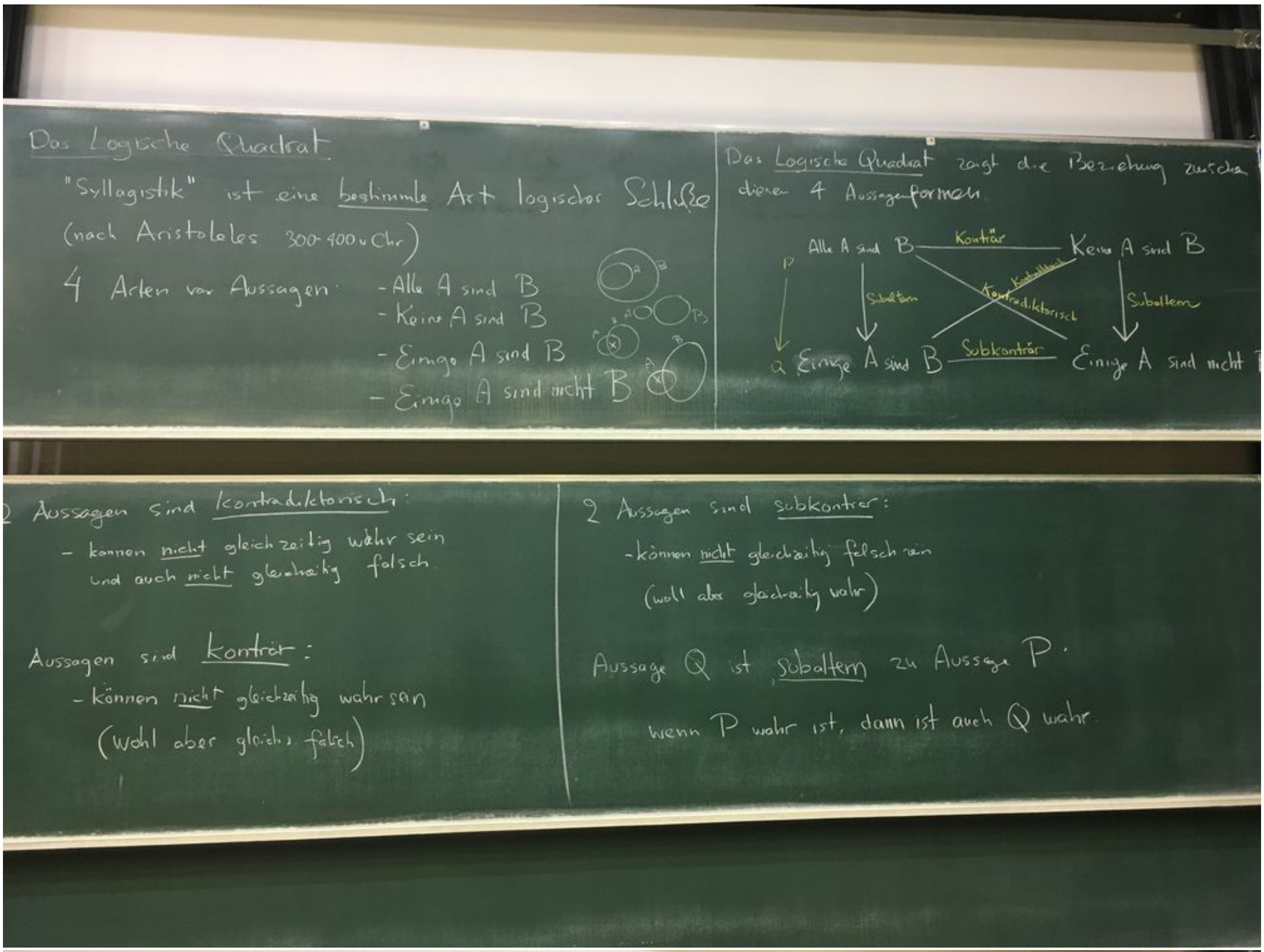
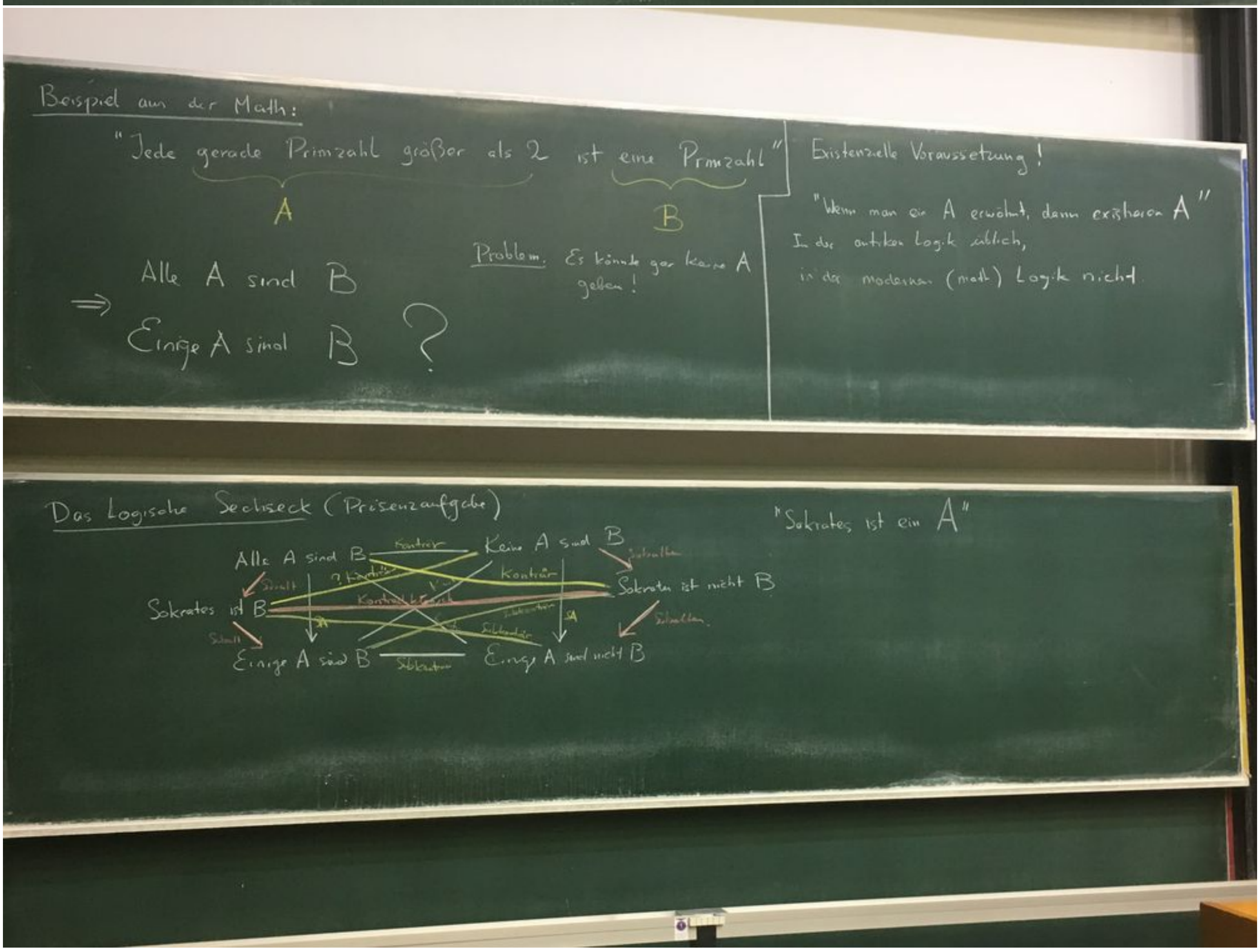
Tafelbild der zweiten Vorlesung *Vertiefung: Algebraische Strukturen* (Sommersemester 2018)
Dr. Yurii Khomskii, 16. April 2018





Aussagenlogik (Skript von Kiechle WiS 15/16)

- Wir haben **Aussagen** $p, q, r, \ldots$ die den **Wahrheitswert** Wahr (1) oder Falsch (0) bekommen
- Es gibt die 1-stellige Verknüpfung $\neg$ "nicht"
- Es gibt 2-stellige Verknüpfungen
  - $p \wedge q$ "p und q"
  - $p \vee q$ "p oder q"
  - $p \Rightarrow q$ "wenn p, dann q"
  - $p \Leftrightarrow q$ "p gdw. q"

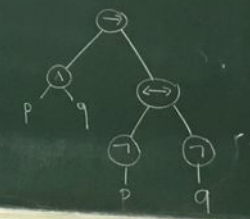
Formale Def: Was ist eine Aussage?

- p, q, r usw. … sind (atomare) Aussagen
- Wenn ϕ eine Aussage ist, dann ist $\neg\phi$ auch eine Aussage
- Wenn ϕ und ψ Aussagen sind, dann sind $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$ und $\phi \leftrightarrow \psi$ auch Aussagen.

(Klammern werden zu Verdeutlichung benutzt)

Beispiel. (1) $p \wedge \wedge \wedge \vee \to \to \to q q$? Nein

(2) $(p \wedge q) \to ((\neg p) \leftrightarrow (\neg q))$ Ja



Def. Wenn der **Wahrheitswert** der atom Aussagen $(p, q \ldots)$ gegeben ist, dann lässt sich der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussagen berechnen:

Wahrh. Tabellen

ϕ	$\neg\phi$
0	1
1	0

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \to \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Beispiel: Wahr Tab. von $p \wedge ((\neg q) \vee r)$

Binär	p	q	r	$\neg q$	$(\neg q) \vee r$	$p \wedge ((\neg q) \vee r)$
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1

Beispiel $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ "De Morgan"

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

<u>Beispiel:</u> $\left[p \to (q \to r)\right] \leftrightarrow \left[(p \wedge q) \to r\right]$

p	q	r	$(q \to r)$	$p \to (q \to r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \to r$	
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

<u>Definition</u> Aussagen die <u>immer</u> (bei jede Wahrheitswert der atom. Aussagen p, q ...) den Wahrheitswert 1 bekommen nennt man <u>Tautologie</u>

<u>Beispiele</u>:

* $\neg\neg p \leftrightarrow p$
* $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ } De Morgan
* $\neg(p \vee q) \leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$ } De Morgan
* $(p \wedge (p \to q)) \to q$ (Modus Ponens)
* $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
* $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow (p \wedge q) \to r$
* ......
* ......

<u>Potenzmengenalgebra</u>. X = Grundmenge

$\mathcal{P}(X)$ = Potenzmenge

Wenn $A, B \in \mathcal{P}(X)$

- $A \cap B$ (Durchschnitt)
- $A \cup B$ (Vereinigung)
- $\overline{A}$ (Komplement)

<u>Frage</u>: Was ist das Verhältnis zwischen Potenzmengenalgebra und Aussagenlogik?

"$x \in A$" $= P$

"$x \in B$" $= Q$

"$x \in A \cap B$" $\equiv P \wedge Q$

"$x \in A \cup B$" $\equiv P \vee Q$

"$x \in \overline{A}$" $\equiv \neg P$

Sei $A = \{x \in X \mid P(x)\}$

$B = \{x \in X \mid Q(x)\}$

$A \cap B = \{x \in X \mid P(x) \wedge Q(x)\}$

$A \cup B = \{x \in X \mid P(x) \vee Q(x)\}$

$\overline{A} = \{x \in X \mid \neg P(x)\}$