Studentische Lösungen zum Übungsblatt 5

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Aufgabe 21.

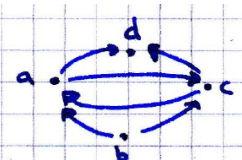
Sei $S = \{\in\}$ und $(A, E) = \mathfrak{A}$ eine S-Struktur.

(a) $\mathfrak{A}$ kann kein Modell der Mengenlehre sein, wenn E symmetrisch ist, denn wegen <u>LM</u> und <u>Ext</u> muss es eine eindeutige leere Menge geben, wegen <u>Einer</u> aber auch eine Menge x, die diese enthält. Dann müsste die leere Menge auch x enthalten (wegen der Symmetrie), was jedoch ein Widerspruch zur Definition der leeren Menge wäre.

(b) $\mathfrak{A}$ kann kein Modell der Mengenlehre sein, wenn E transitiv ist, denn wegen <u>LM</u> gibt es eine eindeutige leere Menge $\emptyset$. Wegen <u>Einer</u> also auch eine eindeutige Menge, die nur $\emptyset$ enthält: $\{\emptyset\}$ und wiederum eine eindeutige Menge, die nur $\{\emptyset\}$ enthält: $\{\{\emptyset\}\}$. Nun gilt $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Wegen der Transitivität müsste auch $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ gelten. Wegen <u>Ext</u> also $\emptyset = \{\emptyset\}$ (da wegen Einer in den beiden Mengen nur $\emptyset$ bzw. $\{\emptyset\}$ enthalten sind), was ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der leeren Menge wäre, es sei denn es gilt $\emptyset = \{\emptyset\}$. Dann gälte aber $\emptyset \in \{\emptyset\} = \emptyset$, was ein Widerspruch zur Definition der leeren Menge wäre.

Aufgabe 22.

(22) $S = \{\in\}$, $\mathfrak{A} = (A, E)$



Betrachte Pfeilvorgänger:

	Pfeilvorgänger
a	b, c
b	—
c	a, b
d	a, c

<u>Ext</u>: ✓ Alle Elemente haben unterschiedliche Pfeilvorgänger

<u>LM</u>: ✓ b ist $\emptyset$, da b keine Pfeilvorgänger hat

<u>Einer</u>: ✗ Ext und LM sind erfüllt und A ist endlich.

<u>Paar</u>: ✗ Sonst würde auch Einer gelten

Aus: X $\varphi(z, x_1) = z \in x_1$,

$\forall x_1 \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x_1 \, z \in x_1))$

Aber für $x_1 = a$ und $x_2 = c$ gilt $z \in a$ und $z \in c$ genau für $z = b$, es gibt aber kein Element, welches genau b als Pfeilvorgänger hat

$\bigcup$-Ax: X Es gibt kein Element, welches ~~[illegible]~~ die Pfeilvorgänger der Elemente von d hat (d hat Pfeilvorgänger a, c, diese haben Pfeilvorgänger a, b, c)

$\cup$-Ax: X Es gibt kein Element, welches die Pfeilvorgänger von a oder c hat (a, b, c)

Aufgabe 23.

Behauptung. Sei $\forall x \exists s \forall z (z \in s \leftrightarrow z \equiv x)$ das Einermengenaxiom (Einer) und $\forall x \forall y \exists p \forall z (z \in p \leftrightarrow (z \equiv x \vee z \equiv y))$ das Paarmengenaxiom (Paar). Wir definieren die Axiomensysteme $T_0 :=$ (Ext) + (Aus), $T_1 := T_0 +$ (Paar), $T_2 := T_1 + (\bigcup\text{-Ax})$ und $T_3 := T_0 +$ (Einer) + ($\cup$-Ax). Dann gilt (a) $T_0 \not\models T_1$, (b) $T_0 \not\models T_3$, (c) $T_2 \models T_3$ und (d) $T_3 \models T_1$.

Beweis.

(a) Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ mit $A = \{☎, ⏏\}$ zweielementig und $E = \{(☎, ⏏)\}$. Damit gilt $\mathfrak{A} \models T_0$, aber $\mathfrak{A} \not\models$ (Paar), denn es gibt kein $x \in A$ mit $⏏ E x$.

(b) Siehe (a).

(c) Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine Struktur mit $\mathfrak{A} \models T_2 =$ (Ext) + (Aus) + (Paar) + ($\bigcup$-Ax). Da das Paarmengenaxiom das Einermengenaxiom trivialerweise impliziert, bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \models$ ($\cup$-Ax).

Seien nun $a, b \in A$. Dann gibt nach dem Paarmengenaxiom ein $p \in A$ mit $zEp \iff (z = a \vee z = b)$ für alle $z \in A$. Nach dem großen Vereinigungsaxiom gibt es nun ein $y \in A$ mit $(xEp \wedge zEx) \implies zEy$ für alle $x, z \in A$, dies gilt aber genau dann, wenn $((x = a \vee x = b) \wedge zEx) \implies zEy$, also genau dann, wenn $(zEa \vee zEb) \implies zEy$. Damit enthält y alle Elemente von a und b.

(d) Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine Struktur mit $\mathfrak{A} \models T_3 =$ (Ext) + (Aus) + (Einer) + ($\cup$-Ax). Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \models$ (Paar). Nach dem Einermengenaxiom gibt es für $a, b \in A$ jeweils ein $s, t \in A$ mit $zEs \iff z = a$ und $zEt \iff z = b$ für alle $z \in A$. Weiterhin gibt es nach dem Vereinigungsaxiom ein $w \in A$ so, dass $(zEs \vee zEt) \implies zEw$, also $(z = a \vee z = b) \implies zEw$ für alle $z \in A$. Sei nun $p \in A$ nach dem Aussonderungsaxiom so, dass $zEp \iff (zEw \wedge (z = a \vee z = b))$, d.h. $zEp \iff (z = a \vee z = b)$, für alle $z \in A$. Damit ist p die Paarmenge von a und b.

$\square$

Aufgabe 24.

$\mathfrak{A}_0$: $A_0 = \{0\}$

$E_0 = \emptyset$

$N_0 = \{\{0\}\} \rightsquigarrow k_0 = 1$

a_1: $A_1 = A_0 \cup \{1\} = \{0,1\}$

$E_1 = \emptyset \cup \{(0,1)\} = \{(0,1)\}$

$N_1 = \{\{1\}, \{0,1\}\} \rightsquigarrow k_1 = 2$

a_2: $A_2 = A_1 \cup \{2,3\}$

$= \{0,1,2,3\}$

$E_2 = E_1 \cup \{(1,2),(0,3),(1,3)\}$

$= \{(0,1),(1,2),(0,3),(1,3)\}$

$N_2 = \{\{2\},\{3\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

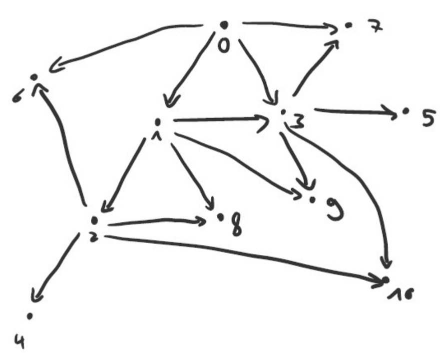
$\rightsquigarrow k_2 = 7$

a_3: $A_3 = A_2 \cup \{4,5,6,7,8,9,10\}$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$E_3 = E_2 \cup \{(2,4),(3,5),(0,6),(2,6),(0,7),(3,7),(1,8),(2,8),(1,9)$
$(3,9),(2,10),(3,10)\}$

$E_3 = E_2 \cup \{(2,4),(3,5),(0,6),(2,6),(0,7),(3,7),(1,8),(2,8),(1,9)$
$(3,9),(2,10),(3,10)\}$



Zusatz: $A_i \neq A_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\{k_{i+1}\}$ ist nicht bedient, d.h. A_{i+1} wird immer größer

Aufgabe 25.

Aufgabe 25: Behauptung: Für alle $i \leq j \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{A}_j$ Enderweiterung von $\mathfrak{A}_i$.

Beweis: Dass es sich jeweils um Substrukturen handelt, ist direkt ersichtlich anhand der rekursiven Definition der A_i und E_i.
Für alle $i \leq j \in \mathbb{N}$ ist die Bedingung "für alle $a, b \in A_j$ gilt: falls $b \in A_i$ und $(a, b) \in E_j$, dann $a \in A_i$" zu prüfen.

Sei also $i \leq j \in \mathbb{N}$ und $a, b \in A_j$ beliebig mit $b \in A_i$ und $(a, b) \in E_j$.
Sei des weiteren j' die kleinste natürliche Zahl mit $(a, b) \in E_{j'}$
$\overset{(*),(**)}{\Rightarrow}$ $a \in A_{j'-1}$ und $b \in A_{j'} \setminus A_{j'-1}$.

Nun muss $i > j' - 1$ gelten.
(Angenommen $i \leq j' - 1$, dann wäre $A_i \subseteq A_{j'-1}$, und mit der Voraussetzung $b \in A_i$ folgt $b \in A_{j'-1}$ im Widerspruch zu $b \in A_{j'} \setminus A_{j'-1}$).
Also ist a sogar Element einer Menge mit kleinerem Index als i, insbesondere gilt damit die Behauptung $a \in A_i$.

Aufgabe 26.

Aufgabe 26: Definiere $E_\infty := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ und $\mathfrak{A}_\infty := (\mathbb{N}, E_\infty)$.
Behauptung: Dann gilt (Ext), (Einer), (Paar) und (Aus),
aber nicht (Pot), ($\cup$-Ax) und ($\bigcup$-Ax).
Beweis:

Zunächst:
$(***)$: Zu jedem $b \in \mathbb{N}$ existieren maximal zwei $a \in \mathbb{N}$, sodass $(a, b) \in E_\infty$.
$(****)$ Ist $X \subseteq \mathbb{N}$ mit $|X| \leq 2$, dann ist $X \in N_i$ für genau ein $i \in \mathbb{N}$.

Beweis:
$(***)$ Sei $b \in \mathbb{N}$. Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $b \in A_k \setminus A_{k-1}$.
Aus $(**)$ folgt, dass Kanten, die auf b zeigen, genau im k-ten Schritt hinzugefügt wurden.
Eine solche Kante (a, b) erfüllt also $a \in X_{b-n_{k-1}} \left[\in N_{k-1} \right]$.
Da jedes der X maximal zwei Elemente enthält, gibt es auch nur maximal zwei solcher a's.
$(****)$ Existenz: Sei $X \subseteq \mathbb{N}$ mit $|X| \leq 2$. Ist X leer, wähle $i = 0$. Andernfalls: sei $x \in X$ das größte Element in X und k so, dass $x \in A_k \setminus A_{k-1}$. Nach $(*)$ gilt $(x, b) \in E_k$ für kein b, also $X \in N_k$.

Eindeutigkeit: Ist $X \in N_i$, so gilt nach Definition der E_i, dass $(a, b) \in E_{i+1}$ für alle $a \in X$ und ein bestimmtes $b \in A_{i+1}$. Halten wir dieses b fest.
Wie wir im Beweis von $(***)$ eingesehen haben, gilt $(a, b) \in E_\infty$ genau für diese $a \in X$. Also ist X in zukünftigen Schritten immer bedient, da $b \in A_j$ und $(a \in X \Leftrightarrow (a, b) \in E_j)$ für alle $j > i$ gilt, also ist $X \notin N_j$ für alle $j > i$.

Angenommen, $X \in N_k$ gelte für ein $k < i$, dann folgt mit obiger Argumentation $X \notin N_i$ im Widerspruch zu $X \in N_i$.
Also: Aus $X \in N_i$ folgt $X \notin N_j$ für alle $j \neq i$.

Insgesamt stellt man fest, dass jeder Zahl nach einem bestimmten System eine maximal zweielementige Menge zugeordnet wird, wobei eine Kante von a nach b bedeutet, dass a in der b zugeordneten Menge enthalten ist (siehe Zeichnung von $\mathfrak{A}_3$). Dass diese Zuordnung bijektiv ist, wird durch $(****)$ gesichert.

Nun zur Aufgabe:

(Ext): Seien $a \neq b$ in $\mathbb{N}$. Dann sind die durch die oben beschrieben Bijektion zugeordneten Mengen unterschiedlich, somit sind auch die Elemente von a und b unterschiedlich.

(Einer): Sei $a \in \mathbb{N}$. Betrachte die Menge $X = \{a\}$ und nehme das c, welches dieser Menge zugeordnet ist. Dann gilt $\forall z(z \equiv a \leftrightarrow z \in c)$.

(Paar): Analog zu (Einer): Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Betrachte die Menge $X = \{a, b\}$ und nehme das c, welches dieser Menge zugeordnet ist. Dann gilt $\forall z((z \equiv a \vee z \equiv b) \leftrightarrow z \in c)$.

(Aus): Sei $x \in \mathbb{N}$. Betrachte die maximal zweielementige Menge X, die x zugeordnet ist. Definiere $Y := \{z \in X \mid z \text{ erfüllt } \varphi(z, \overset{n}{x})\}$, es gilt $|Y| \leq 2$. Das $y \in \mathbb{N}$, welches Y zugeordnet ist, hat damit per Definition genau die Elemente von x, welche $\varphi(z, \overset{n}{x})$ erfüllen.

(Pot): Seien $a_1 \neq a_2 \in \mathbb{N}$. Bezeichne jeweils die Einermengen von a_1, a_2 als $b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ und die Paarmenge von a_1 und a_2 als $b_3 \in \mathbb{N}$. Dann sind $0, b_1, b_2, b_3$ verschieden und alle Teilmengen von b_3. Eine Potenzmenge von b_3 müsste also vier Elemente haben im Widerspruch zu $(***)$.

($\cup$ - Ax): Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden. Sei b_1 die Paarmenge von a_1 und a_2 und b_3 die Einermenge von a_3. Eine Vereinigung von b_1 und b_3 würde die drei Elemente a_1, a_2, a_3 enthalten im Widerspruch zu $(***)$.

($\bigcup$ - Ax): Das ($\bigcup$ - Ax) zusammen mit dem geltendem (Paar)-Axiom impliziert das ($\cup$ - Ax). Da letzteres nicht gilt, kann auch ($\bigcup$ - Ax) nicht gelten.

$\square$