Studentische Lösungen zum Übungsblatt 3

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Aufgabe 11.

Aufgabe 11. Beweise das Koinzidenzlemma für die Fälle $t = c$, $\varphi = t_1 \equiv t_2$ und $\varphi = (\psi \vee \chi)$

Beweis a) $t = c$

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{a}_1(c) = \mathfrak{a}_2(c)$ und daher $\mathfrak{I}_1(c) = \mathfrak{a}_1(c) = \mathfrak{a}_2(c) = \mathfrak{I}_2(c)$, was zu zeigen war.

b) $\varphi = t_1 \equiv t_2$

$\mathfrak{I}_1 \models t_1 \equiv t_2$
gdw. $\mathfrak{I}_1(t_1) = \mathfrak{I}_1(t_2)$ (nach Definition)
gdw. $\mathfrak{I}_2(t_1) = \mathfrak{I}_2(t_2)$ (nach a)
gdw. $\mathfrak{I}_2 \models t_1 \equiv t_2$,was zu zeigen war.

b) $\varphi = (\psi \vee \chi)$

$\mathfrak{I}_1 \models \varphi$
gdw. $\mathfrak{I}_1 \models \psi$ oder $\mathfrak{I}_1 \models \chi$ (nach Def.)
gdw. $\mathfrak{I}_2 \models \psi$ oder $\mathfrak{I}_2 \models \chi$ (nach Induktionsvoraussetzung)
gdw. $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$, was zu zeigen war

c) Was ist mit $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ and $\forall$?

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass diese Fälle auf die hier bzw im Buch behandelten Fälle zurückzuführen sind.

$\square$

Aufgabe 12.

Sei S eine Symbolmenge und $R \notin S$ ein n-stelliges Relationssymbol, welches nicht in S vorkommt. Wir setzen $S^* := S \cup \{R\}$. Sei außerdem ψ ein S-Ausdruck mit den freien Variablen $v_1, \ldots, v_n$. Falls $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta) = ((A, \mathfrak{a}), \beta)$ eine S-Interpretation ist, definieren wir

$$\mathfrak{a}^*: \begin{cases} x \longmapsto \mathfrak{a}(x) \\ R \longmapsto \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \mathfrak{I}\frac{a_1}{v_1} \cdots \frac{a_n}{v_n} \models \psi\} \end{cases}$$

wobei $x \in S$ ein beliebiges Symbol aus S ist.

Betrachte die S^*-Interpretation $\mathfrak{I}^* := ((A, \mathfrak{a}^*), \beta)$. Definiere rekursiv über den Formelaufbau die Abbildung $T: \varphi \longmapsto \hat{\varphi}$, die jeden S^*-Ausdruck φ auf einen S-Ausdruck $\hat{\varphi}$ abbildet mit $T(t_1 \equiv t_2) := t_1 \equiv t_2$ und $T(Rt_1 \ldots t_n) := \psi\frac{t_1 \ldots t_n}{v_1 \ldots v_n}$ für obiges n-stellige Relationssymbol $R \in S^* \setminus S$ und $T(\tilde{R}t_1 \ldots t_n) := \tilde{R}t_1 \ldots t_n$ für ein beliebiges n-stelliges Relationssymbol $\tilde{R} \in S$ und $T(\neg\varphi) := \neg T(\varphi)$ und $T((\varphi * \psi)) := (T(\varphi) * T(\psi))$ für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und $T(\exists v_0 \varphi) := \exists v_0 T(\varphi)$ und $T(\forall v_0 \varphi) := \forall v_0 T(\varphi)$.

Behauptung:

Für alle S^*-Ausdrücke φ gilt: $\mathfrak{I}^* \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{I} \models T(\varphi)$

Beweis:

Zunächst bemerken wir, dass T wohldefiniert ist. Dies zeigt man per Induktion über den Formelaufbau über der Menge $Z := \{\varphi \in L^{S^*} \mid T(\varphi) \in L^S\}$. (NB: Die Funktion T ist rekursiv über den Formelaufbau definiert, also ist per Konstruktion jedes $\varphi \in L^{S^*}$ auch $\varphi \in Z$ (Resultat der Vorlesung). Man kann sich den Induktionsbeweis also eig. sparen.)

Wir beweisen die eigentliche Behauptung nun per Induktion über den Formelaufbau.

Sei $Z := \{\varphi \in L^{S^*} \mid \mathfrak{I}^* \models \varphi \text{ gdw. } \mathfrak{I} \models T(\varphi)\}$

(1) Sei $\varphi \in L^{S^*}$ von der Form $\varphi = t_1 \equiv t_2$ mit $t_1, t_2 \in T^{S^*}$.
Es gelte $\mathfrak{I}^* \models \varphi$, also $\mathfrak{I}^*(t_1) = \mathfrak{I}^*(t_2)$. Da Terme keine Relationssymbole enthalten*, sind t_1 und t_2 S-Terme. Da die Interpretationen $\mathfrak{I}^*$ und $\mathfrak{I}$ auf allen Symbolen in S übereinstimmen und beide die selbe Belegung besitzen, folgt mit dem Koinzidenzlemma:
$\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}^*(t_1) = \mathfrak{I}^*(t_2) = \mathfrak{I}(t_2)$. Folglich ist $\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$. Mit der Definition der Abbildung T schließen wir $\mathfrak{I} \models T(\varphi)$. Jede der obigen Implikationen ist sogar eine Äquivalenz, also $\varphi \in Z$.

---

* dies kann per Induktion über den Termaufbau gezeigt werden.

(II) Sei $\varphi \in L^{S^*}$ von der Form $\varphi = Rt_1 \ldots t_n$ mit $R \in S^* \setminus S$ und $t_1 \ldots t_n$ Terme.
Es gilt: $\mathfrak{I}^* \models \varphi$ gdw $(\mathfrak{I}^*(t_1), \ldots, \mathfrak{I}^*(t_n)) \in \mathfrak{I}^*(R)$ (Def. 3.2.2.)
gdw. $(\mathfrak{a}^*(t_1), \ldots, \mathfrak{a}^*(t_n)) \in \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \mathfrak{I}\frac{a_1}{v_1} \ldots \frac{a_n}{v_n} \models \psi\}$ (Def. $\mathfrak{I}^*$)
gdw. $(t_1, \ldots, t_n) \in \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \mathfrak{I}\frac{a_1}{v_1} \ldots \frac{a_n}{v_n} \models \psi\}$ (da Terme keine Relationssymbole enthalten*)
gdw. $\mathfrak{I}\frac{t_1}{v_1} \ldots \frac{t_n}{v_n} \models \psi$ gdw. $\mathfrak{I} \models \psi\frac{t_1, \ldots, t_n}{v_1, \ldots, v_n}$
gdw. $\mathfrak{I} \models T(\varphi)$. Wir schließen $\varphi \in Z$.

- Die anderen Fälle der Induktion behandelt man analog zu (1) (Man nutze das Koinzidenzlemma).

Wir lassen die Schritte daher fort, und folgern mit dem Lemma über den Formelaufbau $Z = L^{S^*}$.

Es folgt die Behauptung.

$\dashv$

Aufgabe 13.

Aufgabe 13: Behauptung: Es gilt:

(a) $\chi_1 := \forall x(\varphi \wedge \psi) \dashv\models (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$

(b) $\chi_2 := \exists x(\varphi \vee \psi) \dashv\models (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$

(c) $\chi_3 := \forall x(\varphi \vee \psi) \dashv\models (\varphi \vee \forall x\psi)$, falls $x \notin frei(\varphi)$

(d) $\chi_4 := \exists x(\varphi \wedge \psi) \dashv\models (\varphi \wedge \exists x\psi)$, falls $x \notin frei(\varphi)$

(e) Die Voraussetzung '$x \notin frei(\varphi)$' ist notwendig.

Beweis:

(a) Sei $\mathfrak{I}$ Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \chi_1$. Dann: $\mathfrak{I} \models \forall x(\varphi \wedge \psi)$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models (\varphi \wedge \psi)$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in A$: $(\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ und $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi)$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ und für alle $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$

$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{I} \models \forall x\varphi$ und $\mathfrak{I} \models \forall x\psi$

$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{I} \models (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$.

(b) analog zu (a).

(c) Sei $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \chi_3$ und $x \notin frei(\varphi)$. Man kann per Induktion nach dem Formelaufbau zeigen, dass $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi$ unabhängig von a gilt. Betrachte:

$\mathfrak{I} \models \forall x(\varphi \vee \psi)$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models (\varphi \vee \psi)$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in A$: $(\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi)$

$\overset{\text{s.o.}}{\Leftrightarrow}$ für alle $a \in A$: $(\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi)$

$\underset{\text{unabh. von } a}{\overset{\mathfrak{I}\models\varphi \text{ ist}}{\Leftrightarrow}}$ $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder für alle $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \forall x\psi)$.

(d) Sei $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \chi_4$ und $x \notin frei(\varphi)$. Erneut gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi$. Dann:

$\mathfrak{I} \models \exists x(\varphi \wedge \psi) \overset{\text{analog zu (c)}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{I} \models \varphi$ und es gibt ein $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \exists x\psi)$.

(e) Betrachte $\varphi = R_1 v_0$ und $\psi = R_2 v_0$ mit $A = \mathbb{R}$ und

$\mathfrak{a}(R_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, $\mathfrak{a}(R_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\beta(v_0) = 1$.

χ_3 wird dann interpretiert als: 'Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq 0 \vee x \geq 0$' und

χ_4 als: 'Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq 0 \wedge x \geq 0$'.

Beides ist erfüllt.

Aber sowohl $(\varphi \vee \forall x\psi)$, als auch $(\varphi \wedge \exists x\psi)$ werden nicht erfüllt. $\square$

Aufgabe 14.

a) Die Klasse der abelschen Gruppen ist axiomatisierbar mit

$$\Gamma = \{ \varphi_N^*, \varphi_I^*, \varphi_A^*, \varphi_k^* \}$$

mit: $\varphi_N^*: \quad \exists x \forall y (*xy \equiv y \wedge *yx \equiv y)$

$\varphi_I^*: \quad \exists x \forall y \exists z (*yz \equiv x \wedge (*zy \equiv x \wedge (*xy \equiv y \wedge *yx \equiv y)))$

$\varphi_A^*: \quad \forall x \forall y \forall z \quad **xyz \equiv *x*yz$

$\varphi_k^*: \quad \forall x \forall y \quad *xy \equiv *yx$

b) Die Klasse der sechselementigen Gruppen ist axiomatisierbar mit

$$\Gamma = \{ \varphi_N^*, \varphi_I^*, \varphi_A^*, \varphi_6^* \}$$

mit: $\varphi_N^*, \varphi_I^*, \varphi_A^*$ aus a)

$\varphi_6^*: \quad \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \exists v_4 \exists v_5 \exists v_6 (\neg (v_1 \equiv v_2 \vee$
$v_1 \equiv v_3 \vee v_1 \equiv v_4 \vee v_1 \equiv v_5 \vee v_1 \equiv v_6 \vee$
$v_2 \equiv v_3 \vee v_2 \equiv v_4 \vee v_2 \equiv v_5 \vee v_2 \equiv v_6 \vee$
$v_3 \equiv v_4 \vee v_3 \equiv v_5 \vee v_3 \equiv v_6 \vee v_4 \equiv v_5 \vee$
$v_4 \equiv v_6 \vee v_5 \equiv v_6) \wedge$
$(\forall v_7 \ (v_7 \equiv v_1) \vee (v_7 \equiv v_2) \vee (v_7 \equiv v_3) \vee$
$(v_7 \equiv v_4) \vee (v_7 \equiv v_5) \vee (v_7 \equiv v_6) \ )$

c) Die Klasse der unendlichen Gruppen ist axiomatisierbar mit

$$\Gamma = \{ \varphi_N^*, \varphi_I^*, \varphi_A^*, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \dots \}$$

mit: $\varphi_N^*, \varphi_I^*, \varphi_A^*$ aus a)

$\varphi_1: \quad \exists v_1 \quad v_1 \equiv v_1$

$\varphi_2: \quad \exists v_1 \exists v_2 \quad \neg v_1 \equiv v_2$

$\varphi_3: \quad \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \quad \neg (v_1 \equiv v_2 \vee v_1 \equiv v_3 \vee v_2 \equiv v_3)$

$\vdots$

$\varphi_n: \quad \exists v_1 \dots \exists v_n \quad \neg (v_1 \equiv v_2 \vee \dots \vee v_{n-1} \equiv v_n)$

$\vdots$

Aufgabe 15.

(15) S Symbolmenge mit $S_F = \{ \dot{+}, \dot{\times}, \dot{\oplus}, \dot{\otimes} \}$, $S_R = \{ \dot{V}, \dot{S} \}$

2-stellig einstellig

$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$. $K_{\mathfrak{A}} := \mathfrak{a}(\dot{S})$, $V_{\mathfrak{A}} := \mathfrak{a}(\dot{V})$

Gesucht: Axiome Γ in Sprache L^S, s.d. für jede S-Struktur $\mathfrak{A} \models \Gamma$:

(a) $(K_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{a}(\dot{+}), \mathfrak{a}(\dot{\times}))$ ist Körper

(b) $(V_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{a}(\dot{\oplus}))$ ist $K_{\mathfrak{A}}$-VR mit Skalarmultiplikation

a)
$$\left.\begin{array}{l} \forall x \forall y ((\dot{S}x \wedge \dot{S}y) \rightarrow \dot{S} \dot{+} xy) \\ \forall x \forall y ((\dot{S}x \wedge \dot{S}y) \rightarrow \dot{S} \dot{\times} xy) \end{array}\right\} \text{Abgeschlossenheit der operationen}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z (((\dot{S}x \wedge \dot{S}y) \wedge \dot{S}z) \rightarrow \dot{+}\dot{+}xyz \equiv \dot{+}x\dot{+}yz) \\ \forall x \forall y \forall z (((\dot{S}x \wedge \dot{S}y) \wedge \dot{S}z) \rightarrow \dot{\times}\dot{\times}xyz \equiv \dot{\times}x\dot{\times}yz) \end{array}\right\} \text{Assoziativität}$$

$$\text{neutr. + inv. (bei } \dot{\times} \text{ ohne Null)} \left\{\begin{array}{l} \forall x \exists i \exists i' \exists e \exists e' (((\dot{S}i \wedge \dot{S}e) \wedge (\dot{S}x \rightarrow (((\dot{+}xe \equiv x \wedge \dot{+}ex \equiv x) \wedge \dot{+}xi \equiv e) \wedge \dot{+}ix \equiv e))) \\ \quad \wedge ((\dot{S}i' \wedge \dot{S}e') \wedge ((\dot{S}x \wedge \neg x \equiv e) \rightarrow (((\dot{\times}xe' \equiv x \wedge \dot{\times}e'x \equiv x) \wedge \dot{\times}xi' \equiv e') \wedge \dot{\times}i'x \equiv e')))) \end{array}\right.$$

$$\forall x \forall y ((\dot{S}x \wedge \dot{S}y) \rightarrow (\dot{+}xy \equiv \dot{+}yx \wedge \dot{\times}xy = \dot{\times}yx)) \} \text{ Kommutativität}$$

$$\text{Distri.} \{ \forall x \forall y \forall z (((\dot{S}x \wedge \dot{S}y) \wedge \dot{S}z) \rightarrow (\dot{\times}x\dot{+}yz \equiv \dot{+}\dot{\times}xy\dot{\times}xz \wedge \dot{\times}\dot{+}xyz \equiv \dot{+}\dot{\times}xz\dot{\times}yz))$$

b)
$$\forall x \forall y \forall z (((\dot{V}x \wedge \dot{V}y) \wedge \dot{S}z) \rightarrow (\dot{V}\dot{\oplus}xy \wedge \dot{S}\dot{\otimes}zx)) \} \text{ Abgeschlossenheit}$$

$$\forall x \forall y \forall z (((\dot{V}x \wedge \dot{V}y) \wedge \dot{V}z) \rightarrow \dot{\oplus}\dot{\oplus}xyz \equiv \dot{\oplus}x\dot{\oplus}yz) \} \text{ Assoziativität}$$

$$\text{neutr. + inv.} \{ \exists i \forall x \exists e ((\dot{V}i \wedge \dot{V}e) \wedge (\dot{V}x \rightarrow (((\dot{\oplus}xe \equiv x \wedge \dot{\oplus}ex \equiv x) \wedge \dot{\oplus}xi \equiv e) \wedge \dot{\oplus}ix \equiv e)))$$

$$\text{Kommutativität} \{ \forall x \forall y ((\dot{V}x \wedge \dot{V}y) \rightarrow \dot{\oplus}xy \equiv \dot{\oplus}yx)$$

$$\text{Gesetze Skalare Multiplikation} \left\{\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z (((\dot{S}x \wedge \dot{V}y) \wedge \dot{V}z) \rightarrow \dot{\otimes}x\dot{\oplus}yz \equiv \dot{\oplus}\dot{\otimes}xy\dot{\otimes}xz) \\ \forall x \forall y \forall z (((\dot{S}x \wedge \dot{S}y) \wedge \dot{V}z) \rightarrow \dot{\otimes}\dot{+}xyz \equiv \dot{\oplus}\dot{\otimes}xz\dot{\otimes}yz) \\ \forall x \forall y \forall z (((\dot{S}x \wedge \dot{S}y) \wedge \dot{V}z) \rightarrow \dot{\otimes}\dot{\times}xyz \equiv \dot{\otimes}x\dot{\otimes}yz \end{array}\right.$$

$$\text{neutr. + inv.} \left\{\begin{array}{l} \forall x \forall y \exists i \exists i' \exists e \exists e' (((((\dot{S}i \wedge \dot{S}e) \wedge \dot{S}i') \wedge \dot{S}e') \\ \quad \wedge (\dot{S}x \rightarrow (((\dot{+}xe \equiv x \wedge \dot{+}ex \equiv x) \wedge \dot{+}xi \equiv e) \wedge \dot{+}ix \equiv e))) \\ \quad \wedge ((\dot{S}x \wedge \neg x \equiv e) \rightarrow (((\dot{\times}xe' \equiv x \wedge \dot{\times}e'x \equiv x) \wedge \dot{\times}xi' \equiv e') \wedge \dot{\times}i'x \equiv e'))) \\ \quad \wedge (\dot{V}y \rightarrow \dot{\otimes}e'y \equiv y)) \end{array}\right.$$

$\dot{+}$ braucht man, da Inverses von $\dot{\times}$ für e nicht ex.

hiemit braucht man Formel für neutr. + inv. im Körper nicht mehr

(man muss die vom Körper nochmal aufschreiben, da 1-Element sonst nicht definiert)

Damit ist die Klasse der Vektorräume nicht im Sinne von Aufgabe (14) axiomatisierbar, denn dass eine Struktur Γ modelliert ist nicht äquivalent dazu, dass diese Struktur ein Vektorraum ist, sondern dass eine Teilmenge vom Träger ein Vektorraum ist.