Lösungsvorschläge zur Musterklausur

Frage 1.
Sei $\mathfrak{K}$ der Kalkül, welcher aus den fünf Regeln (Vor), (Ant), (Wid), (FU) und ($\vee$A) besteht.

(i) Seien Γ und Γ' Folgen von Ausdrücken und seien φ, ψ und χ Ausdrücke.

4.2.2 Voraussetzungsregel (Vor)

$$\frac{}{\Gamma \quad \varphi}\text{, } \textit{falls } \varphi \textit{ ein Glied von } \Gamma \textit{ ist.}$$

4.2.1 Antezedensregel (Ant)

$$\frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \quad \varphi}\text{, } \textit{falls jedes Glied von } \Gamma \textit{ ein Glied von } \Gamma' \textit{ ist}$$
$$(\textit{kurz: falls } \Gamma \subseteq \Gamma').$$

4.2.4 Widerspruchsregel (Wid)

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \neg\varphi & \psi \\ \Gamma & \neg\varphi & \neg\psi \\ \hline \Gamma & & \varphi \end{array}$$

4.2.3 Fallunterscheidungsregel (FU)

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi \\ \hline \Gamma & & \varphi \end{array}$$

4.2.5 Regel der $\vee$-Einführung im Antezedens ($\vee$A)

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \chi \\ \Gamma & \psi & \chi \\ \hline \Gamma & (\varphi \vee \psi) & \chi \end{array}$$

(ii)

(1)

1.	Γ			φ	Prämisse
2.	Γ	φ		ψ	Prämisse
3.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	φ	(Ant) auf 1.
4.	Γ	$\neg\varphi$		$\neg\varphi$	(Vor)
5.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	φ	(Ant) auf 4.
6.	Γ	$\neg\varphi$		ψ	(Wid) auf 3., 5.
7.	Γ			ψ	(FU) auf 2., 6.

(2)

1.	Γ	ξ		$(\neg\varphi \vee \psi)$	Prämisse
2.	Γ			φ	Prämisse
3.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	φ	(Ant) auf 2.
4.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi$	(Vor)
5.	Γ	$\neg\varphi$		ψ	(Wid) auf 3., 4.
6.	Γ	ψ		ψ	(Vor)
7.	Γ	$(\neg\varphi \vee \psi)$		ψ	($\vee$A) auf 5., 6.
8.	Γ			ψ	(1) auf 1., 7.

Frage 2.

(i)

(I) $\exists x \varphi$

$$
\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}\tfrac{a}{x}\right)^{\pi} &= \\
\left(A, \mathfrak{a}, \beta\tfrac{a}{x}\right)^{\pi} &= \\
\left(B, \mathfrak{b}, \pi \circ \beta\tfrac{a}{x}\right) & \\
& \quad \pi\circ\beta\tfrac{a}{x} = (\pi\circ\beta)\tfrac{\pi(a)}{x} \\
= \left(B, \mathfrak{b}, (\pi\circ\beta)\tfrac{\pi(a)}{x}\right) & \\
= (B, \mathfrak{b}, \pi\circ\beta)\tfrac{\pi(a)}{x} &= \left(\mathfrak{I}^{\pi}\right)\tfrac{\pi(a)}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \exists x \varphi &\iff \text{ex. } a \in A \;\; \mathfrak{I}\tfrac{a}{x} \models \varphi \\
&\overset{\mathrm{IV}}{\iff} \text{ex. } a \in A \;\; \left(\mathfrak{I}\tfrac{a}{x}\right)^{\pi} \models \varphi \\
&\iff \text{ex. } a \in A \;\; \left(\mathfrak{I}^{\pi}\right)\tfrac{\pi(a)}{x} \models \varphi \\
&\iff \text{ex. } b \in B \;\; \left(\mathfrak{I}^{\pi}\right)\tfrac{b}{x} \models \varphi
\end{aligned}
$$

[weil π Surjektion war]
für $\Longleftarrow$

$$\iff \mathfrak{I}^{\pi} \models \exists x \varphi$$

qed (2)

qed (Isomorphielemma)

(ii) Sei $X \subseteq A$ eine definierbare Teilmenge, sei φ eine S-Formel mit einer freien Variablen x die X definiert und sei $a \in A$. Dann gilt für jede Belegung β:

$$\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x} \models \varphi \overset{(i)}{\iff} \mathfrak{A}, \pi \circ \left(\beta\frac{a}{x}\right) \models \varphi \iff \mathfrak{A}, (\pi \circ \beta)\frac{\pi(a)}{x} \models \varphi \overset{\text{frei}(\varphi)=\{x\}}{\iff} \mathfrak{A}, \beta\frac{\pi(a)}{x} \models \varphi.$$

Somit gilt $a \in X$ genau dann, wenn $\pi(a) \in X$ und so ist X invariant unter π.

(iii) Wir definieren $\sigma_1 := \forall v_0 \neg v_0 \cdot v_0 \equiv 1 + 1$, $\sigma_2 := \exists v_0 \forall v_1 \neg v_1 \cdot v_1 \equiv v_0$ und $\sigma_3 := \sigma_2$. Dann gilt $\mathfrak{Q} \models \sigma_1 \wedge \sigma_2$, $\mathfrak{R} \models \neg\sigma_1 \wedge \sigma_3$ und $\mathfrak{C} \models \neg\sigma_2 \wedge \neg\sigma_3$.

(iv) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation. Dann ist f ein S-Automorphismus. Sei nun $X \subseteq \mathbb{C}$ eine nicht-leere S-definierbare Teilmenge und sei $z := x + iy \in X$. Dann gilt entweder $y \leq 0$ oder $y > 0$. Im zweiten Fall betrachten wir $f(z)$. Nach (ii) gilt, $f(z) \in X$. Also liegt $f(z)$ nicht in der oberen Halbebene. Somit gibt es in beiden Fällen ein Element von X, welches nicht in der oberen Halbebene liegt und so kann X nicht in der oberen Halbebene liegen.

Frage 3.
Wir wählen Ext, Aus_φ und Pot.

(i) Ext: $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$
Für eine Formel der Gestalt $\varphi(z, x_1, \dots, x_n)$ besagt Aus_φ:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \land \varphi(z, x_1, \dots, x_n)))$$

Pot: $\forall x \exists y \forall z (\forall w (w \in z \to w \in x) \to z \in y)$

(ii) Sei $\varphi := \forall x \exists y \neg y \in x$.

(iii) Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine $\{\in\}$-Struktur mit $\mathfrak{A} \models \Phi$. Sei $a \in A$. Nach Aus_ψ mit $\psi(z) = z \notin z$ gibt es ein $b \in A$ sodass für alle $c \in A$ gilt, dass cEb genau dann, wenn cEa und nicht cEc. Wir zeigen, dass bEa nicht gelten kann. Angenommen, bEa. Dann gilt bEb genau dann, wenn bEb nicht gilt. Aber das ist ein Widerspruch. Also gilt bEa nicht und somit $\mathfrak{A} \models \varphi$.

(iv) Sei $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine $\{\in\}$-Struktur mit $\mathfrak{A} \models \Phi$. Nach Definition ist A nicht leer. Sei $a \in A$ beliebig. Nach Aus_ψ mit $\psi(z) = z \neq z$ angewandt auf a erhalten wir ein $b \in A$ das keine Elemente hat. Somit erfüllt $\mathfrak{A}$ das leere Mengenaxiom und nach Ext ist die leere Menge eindeutig. Wir wenden nun Pot auf a an und erhalten ein $b \in A$ das alle Teilmengen von a in $\mathfrak{A}$ enthält. Mit Aus_χ mit $\chi(z, a) = z \subseteq a$ bekommen wir sogar ein $b' \in A$ welches genau die Teilmengen von a in $\mathfrak{A}$ enthält. Nach Ext ist dieses b' eindeutig. Im folgenden schreiben wir $\mathrm{Pot}(a)$ für dieses b'.

Wir definieren nun rekursiv eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$:

$$\begin{aligned} f(0) &:= \emptyset \\ f(n+1) &:= \mathrm{Pot}(f(n)). \end{aligned}$$

Wir zeigen per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\forall k < n\ f(k) \neq f(n)$. Der Fall $n = 0$ ist klar. Sei $n \in \mathbb{N}$ sodass die Behauptung gilt. Angenommen, es gibt ein $k < n + 1$ sodass $f(n+1) = f(k)$. Dann gilt $f(n)Ef(n+1)$ und so $k \neq 0$. Also gibt es ein $l < n$ mit $k = l + 1$. Dann gilt

$$\mathrm{Pot}(f(n)) = f(n+1) = f(l+1) = \mathrm{Pot}(f(l)).$$

Wir zeigen, dass dann $f(n) = f(l)$ gelten muss. Angenommen, nicht. Dann gibt es oBdA ein $a \in A$ mit $aEf(n)$ und nicht $aEf(l)$. Nach Aus_ψ mit $\psi(z, a) = z = a$ gibt es ein $b \in A$ sodass für alle $c \in A$ gilt, dass cEb genau dann, wenn $cEf(n)$ und $c = a$. Somit gilt cEb genau dann, wenn $c = a$. Dann ist b eine Teilmenge von $f(n)$ aber nicht von $f(l)$. Aber dies ist ein Widerspruch. Also gilt $f(n) = f(l)$ und das ist ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. Insgesamt gilt, dass die $f(n)$ paarweise verschieden sind und so ist f injektiv. Somit muss A unendlich sein.

Frage 4.

(i) Seien α, β Ordinalzahlen und sei δ eine Limeszahl. Dann ist die Ordinalzahladdition und Ordinalzahlmultiplikation wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &:= \alpha & \alpha \cdot 0 &:= 0 \\ \alpha + S(\beta) &:= S(\alpha + \beta) & \alpha \cdot S(\beta) &:= \alpha \cdot \beta + \alpha \\ \alpha + \delta &:= \bigcup \{\alpha + \xi : \xi < \delta\} & \alpha \cdot \delta &:= \bigcup \{\alpha \cdot \xi : \xi < \delta\}. \end{aligned}$$

(ii)

(a) Gilt. (Induktion nach γ)

(b) Gilt nicht. Betrachte $(\omega \cdot \omega) \cdot (2 \cdot 2) > \omega \cdot \omega = (2 \cdot 2) \cdot (\omega \cdot \omega)$.

(c) Gilt. (Vergleiche Aufgabe 49)

(d) Gilt nicht. Betrachte $(\omega \cdot \omega) \cdot 1 + (\omega \cdot \omega) \cdot \omega = (\omega \cdot \omega) \cdot \omega < (\omega \cdot \omega) \cdot \omega + (\omega \cdot \omega) \cdot 1$.

(e) Gilt.

(iii)

(a) Wir definieren rekursiv:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &:= \xi + 1, \\ \gamma_{n+1} &:= \bigcup \{S(\alpha + \beta) : \alpha, \beta < \gamma_n\}, \text{ und} \\ \gamma &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n. \end{aligned}$$

Dann gilt $\gamma > \xi$. Wir zeigen, dass γ eine Gammazahl ist. Seien $\alpha, \beta \in \gamma$. Dann gibt es ein $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \in \gamma_n$ und $\beta \in \gamma_m$. Sei $k := \max\{n, m\}$. Dann gilt $\alpha, \beta < \gamma_k$ und so $\alpha + \beta < \gamma_{k+1} \leq \gamma$.

(b) Sei γ eine Gammazahl. Dann kann γ kein Nachfolger sein der größer als 1 ist. Denn sonst gäbe es ein $\alpha \in \gamma$ mit $\alpha + 1 = \gamma$ und das kann nicht sein. Also ist γ gleich 0, gleich 1 oder eine Limeszahl. In den Fällen $\gamma = 0$ oder $\gamma = 1$ folgt die Behauptung sofort. Also nehmen wir an, dass γ eine Limeszahl ist. Sei $\alpha < \gamma$. Dann gilt

$$\alpha + \gamma = \bigcup \{\alpha + \beta : \beta < \gamma\}.$$

Da γ eine Gammazahl ist, gilt $\alpha + \beta < \gamma$ für alle $\beta < \gamma$ und somit

$$\bigcup \{\alpha + \beta : \beta < \gamma\} = \bigcup \{\xi : \xi < \gamma\} = \gamma.$$

(c) Seien α, β und γ Ordinalzahlen mit $\alpha < \beta$. Dann gilt

$$\gamma + \alpha < \gamma + \beta \tag{1}$$

(vergleiche studentische Lösungen Aufgabe 49). Weiter gilt die folgende Behauptung.

Behauptung. Für $\alpha \leq \beta$ gibt es ein eindeutiges γ mit $\alpha + \gamma = \beta$.

Beweis. Wir betrachten die Menge $A := \{\gamma \in \beta + 1 : \alpha + \gamma \geq \beta\}$. Dann gilt $\beta \in A$ und somit ist A nicht-leer. Sei γ_0 das kleinste Element von A. Angenommen, $\alpha + \gamma_0 > \beta$. Dann gilt $\gamma_0 \neq 0$ weiter kann γ_0 keine Limeszahl sein das es sonst ein $\delta < \gamma_0$ gäbe mit $\alpha + \delta \geq \beta$. Also ist γ_0 ein Nachfolger. Sei δ der Vorgänger von γ_0. Dann gilt $\alpha + \gamma_0 = \alpha + S(\delta) = S(\alpha + \delta)$. Also $\alpha + \delta \geq \beta$. Aber dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von γ_0. Somit ist $\alpha + \gamma_0 = \beta$. Die Eindeutigkeit folgt direkt aus (1). $\square$

Sei nun κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gibt es eine Bijektion f zwischen $A := \kappa \times \{0\} \cup \kappa \times \{1\}$ und κ. Seien $\alpha, \beta < \kappa$. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} g : \alpha + \beta &\longrightarrow A \\ \gamma &\longmapsto \begin{cases} (\gamma, 0) & \gamma < \alpha \\ (\delta, 1) & \alpha \leq \gamma \text{ wobei } \delta \text{ die eindeutige Oz mit } \alpha + \delta = \gamma \text{ ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist g eine Injektion mit (1) und so ist $f \circ g$ eine Injektion von $\alpha + \beta$ in κ. Also ist $\alpha + \beta < \kappa$.