## Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 11

**Aufgabe 55.** Sei $\Phi$ eine Menge von Formeln.

(a) Sei $(R_\Phi)$ die Regel

$$\frac{}{\Gamma \quad \varphi}, \text{ falls } \varphi \in \Phi$$

und sei $\mathfrak{K}_\Phi$ der Kalkül, der nur die Regel $(R_\Phi)$ hat.

**Behauptung.** Sei $\Psi$ eine Menge von Formeln und sei $\varphi$ eine Formel. Dann gilt $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \varphi$ genau dann, wenn $\varphi \in \Phi$.

*Beweis.* "$\Rightarrow$": Sei $S_1 \dots S_n$ eine $\mathfrak{K}_\Phi$-Ableitung mit $S_n = \Gamma\varphi$ und $T_\Gamma \subseteq \Psi$. Da $\mathfrak{K}_\Phi$ nur eine Regel hat, ist $S_n \in (R_\Phi)$. Somit gilt $\varphi \in \Phi$.

"$\Leftarrow$": Sei $\varphi \in \Phi$ und sei $\Gamma \subseteq T_\Psi$. Dann ist $\Gamma\varphi \in (R_\Phi)$ und so ist die Folge $S_1 := \Gamma\varphi$ eine $\mathfrak{K}_\Phi$-Ableitung. Also gilt $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \varphi$. $\square$

(b) Angenommen $\Phi$ wäre nicht $\mathfrak{K}_\Phi$-widerspruchsfrei. Dann gibt es eine Formel $\varphi$ sodass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \neg\varphi$ gelten. Nach (a) gilt dann $\varphi, \neg\varphi \in \Phi$. Also gilt auch $\vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \varphi$ und $\vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \neg\varphi$. Aus der Korrektheit folgt nun, dass $\models \varphi$ und $\models \neg\varphi$ gelten. Aber dies ist ein Widerspruch. Also ist $\Phi$ $\mathfrak{K}_\Phi$-widerspruchsfrei.

(c) Die Umkehrung von (b) gilt im Allgemeinem nicht. Betrachte zum Beispiel $\varphi = \neg x \equiv x$ und $\Phi = \{\varphi\}$. Dann ist $\mathfrak{K}_\Phi$ nicht korrekt aber $\Phi$ ist $\mathfrak{K}_\Phi$-widerspruchsfrei.

(d) Sei $\varphi = x \equiv x$ und sei $\Phi = \{\varphi\}$. Dann gilt für jede Menge von Formeln $\Psi$, $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \psi$ genau dann, wenn $\psi = \varphi$. Also ist $\mathfrak{K}_\Phi$ nicht explosiv. Der Kalkül ist aber korrekt, da jede Interpretation $\varphi$ erfüllt und so $\models \varphi$ gilt.

**Aufgabe 56.**
Wir betrachten als erstes die Kontrapositionsregeln (vgl. 4.3.3 aus dem Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas):

**4.3.3 Kontrapositionsregeln (KP)**

(a) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \neg\psi \quad \neg\varphi}$ (b) $\dfrac{\Gamma \quad \neg\varphi \quad \neg\psi}{\Gamma \quad \psi \quad \varphi}$

(c) $\dfrac{\Gamma \quad \neg\varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \neg\psi \quad \varphi}$ (d) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi \quad \neg\psi}{\Gamma \quad \psi \quad \neg\varphi}$

*Rechtfertigung von* (a).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\Gamma$ | $\varphi$ | | $\psi$ | Prämisse |
| 2. | $\Gamma$ | $\neg\psi$ | $\varphi$ | $\psi$ | (Ant) auf 1. |
| 3. | $\Gamma$ | $\neg\psi$ | $\varphi$ | $\neg\psi$ | (Vor) |
| 4. | $\Gamma$ | $\neg\psi$ | $\varphi$ | $\neg\varphi$ | (Wid′) auf 2., 3. |
| 5. | $\Gamma$ | $\neg\psi$ | $\neg\varphi$ | $\neg\varphi$ | (Vor) |
| 6. | $\Gamma$ | $\neg\psi$ | | $\neg\varphi$ | (FU) auf 4., 5. |

Mit Hilfe der Kontrapositionsregeln können wir nun die Regeln ableiten.

(a1) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x \varphi}{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}$

Rechtfertigung

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\Gamma$ | $\forall x \varphi$ | | Prämisse |
| 2. | $\Gamma$ | $\neg\exists x \neg\varphi$ | | $\forall x \varphi = \neg\exists x \neg\varphi$ |
| 3. | $\Gamma$ | $\neg\varphi\frac{t}{x}$ | $\neg\varphi\frac{t}{x}$ | (Vor) |
| 4. | $\Gamma$ | $\neg\varphi\frac{t}{x}$ | $\exists x \neg\varphi$ | $(\exists S)$ auf 3. |
| 5. | $\Gamma$ | $\neg\exists x \neg\varphi$ | $\varphi\frac{t}{x}$ | (KP)(c) auf 4. |
| 6. | $\Gamma$ | | $\varphi\frac{t}{x}$ | (KS) auf 2., 5. |

(a2) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x \varphi}{\Gamma \quad \varphi}$

Rechtfertigung

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\Gamma$ | $\neg\exists x \neg\varphi$ | | Prämisse |
| 2. | $\Gamma$ | $\neg\varphi\frac{x}{x}$ | $\neg\varphi\frac{x}{x}$ | (Vor) |
| 3. | $\Gamma$ | $\neg\varphi\frac{x}{x}$ | $\exists x \neg\varphi$ | $(\exists S)$ auf 2 |
| 4. | $\Gamma$ | $\neg\exists x \neg\varphi$ | $\varphi\frac{x}{x}$ | (KP)(c) auf 3. |
| 5. | $\Gamma$ | | $\varphi\frac{x}{x}$ | (KS) auf 1, 4. |
| 6. | $\Gamma$ | | $\varphi$ | $\varphi = \varphi\frac{x}{x}$ |

(b1) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\varphi \quad \psi}$

Rechtfertigung

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\Gamma$ | $\varphi\frac{t}{x}$ | $\psi$ | Prämisse |
| 2. | $\Gamma$ | $\neg\psi$ | $\neg\varphi\frac{t}{x}$ | (KP)(a) auf 1. |
| 3. | $\Gamma$ | $\neg\psi$ | $\exists x\neg\varphi$ | ($\exists$S) auf 2. |
| 4. | $\Gamma$ | $\neg\exists x\neg\varphi$ | $\psi$ | (KP)(c) auf 3. |
| 5. | $\Gamma$ | $\forall x\varphi$ | $\psi$ | $\neg\exists x\neg\varphi = \forall x\varphi$ |

(b3) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\varphi \quad \psi}$

Rechtfertigung

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\Gamma$ | $\varphi$ | $\psi$ | Prämisse |
| 2. | $\Gamma$ | $\neg\psi$ | $\neg\varphi$ | (KP)(a) auf 1 |
| 3. | $\Gamma$ | $\neg\psi$ | $\neg\varphi\frac{x}{x}$ | $\neg\varphi = \neg\varphi\frac{x}{x}$ |
| 4. | $\Gamma$ | $\neg\psi$ | $\exists x\neg\varphi$ | ($\exists$S) auf 3. |
| 5. | $\Gamma$ | $\neg\exists x\neg\varphi$ | $\psi$ | (KP)(c) auf 4. |
| 6. | $\Gamma$ | $\forall x\varphi$ | $\psi$ | $\neg\exists x\neg\varphi = \forall x\varphi$ |

(b2) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \quad \forall x\varphi}$, falls $y$ nicht frei in $\Gamma\forall x\varphi$

Rechtfertigung

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\Gamma$ | | $\varphi\frac{y}{x}$ | Prämisse |
| 2. | $\Gamma$ | $\exists x\neg\varphi$ | $\varphi\frac{y}{x}$ | (Ant) auf 1. |
| 3. | $\Gamma$ | $\neg\varphi\frac{y}{x}$ | $\neg\exists x\neg\varphi$ | (KP)(a) auf 2. |
| 4. | $\Gamma$ | $\exists x\neg\varphi$ | $\neg\exists x\neg\varphi$ | ($\exists$A) auf 3. ($y$ nicht frei in $\Gamma\forall x\varphi$) |
| 5. | $\Gamma$ | $\neg\exists x\neg\varphi$ | $\neg\exists x\neg\varphi$ | (Vor) |
| 6. | $\Gamma$ | | $\neg\exists x\neg\varphi$ | (FU) auf 4., 5. |
| 7. | $\Gamma$ | | $\forall x\varphi$ | $\neg\exists x\neg\varphi = \forall x\varphi$ |

(b4) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad \forall x\varphi}$, falls $x$ nicht frei in $\Gamma$

Rechtfertigung

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\Gamma$ | | $\varphi$ | Prämisse |
| 2. | $\Gamma$ | $\exists x\neg\varphi$ | $\varphi$ | (Ant) auf 1. |
| 3. | $\Gamma$ | $\exists x\neg\varphi$ | $\varphi\frac{x}{x}$ | $\varphi = \varphi\frac{x}{x}$ |
| 4. | $\Gamma$ | $\neg\varphi\frac{x}{x}$ | $\neg\exists x\neg\varphi$ | (KP)(a) auf 3. |
| 5. | $\Gamma$ | $\exists x\neg\varphi$ | $\neg\exists x\neg\varphi$ | ($\exists$A) auf 4. ($x$ nicht frei in $\Gamma$) |
| 6. | $\Gamma$ | $\neg\exists x\neg\varphi$ | $\neg\exists x\neg\varphi$ | (Vor) |
| 7. | $\Gamma$ | | $\neg\exists x\neg\varphi$ | (FU) auf 5., 6. |
| 8. | $\Gamma$ | | $\forall x\varphi$ | $\neg\exists x\neg\varphi = \forall x\varphi$ |

**Aufgabe 57.**

**Behauptung.** Sei $\mathfrak{K}$ der Kalkül, welcher aus den Regeln (Ant), (Vor) und ($\vee$A) besteht. Dann gilt für keine Formel $\varphi$, dass $\vdash_{\mathfrak{K}} (\varphi \vee \neg\varphi)$.

*Beweis.* Sei $\psi$ eine beliebige Formel und sei $S_1 \dots S_n$ eine $\mathfrak{K}$-Ableitung mit $S_n = \Gamma\psi$. Wir zeigen per Ordnungsinduktion, dass $T_\Gamma$ nicht leer ist. Daraus folgt direkt die Behauptung. Angenommen für alle $\mathfrak{K}$-Ableitungen der Länge $< n$ gilt das der Antezedenz des letzten Glieds nicht leer ist. Weiter sei $S_1 \dots S_n$ eine $\mathfrak{K}$-Ableitung mit $S_n = \Gamma\psi$. Dann ist $S_n$ durch eine Regel aus $\mathfrak{K}$ entstanden. Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $S_n \in$ (Vor). Dann gilt nach der Definition von (Vor), dass $\psi \in T_\Gamma$ und somit ist $T_\Gamma$ nicht leer.

Fall 2: Es gibt ein $i < n$ mit $(S_i, S_n) \in$ (Ant). Dann gilt $S_i = \Gamma'\psi$ mit $T_{\Gamma'} \subseteq T_\Gamma$. Weiter ist $S_1 \dots S_i$ eine $\mathfrak{K}$-Ableitung und so ist $\Gamma'$ nach Induktionsvoraussetzung nicht leer.

Fall 3: Es gibt $i, j < n$ mit $(S_i, S_j, S_n) \in (\vee\text{A})$. Dann gilt $S_i = \Gamma'\chi_i\psi$ und $S_j = \Gamma'\chi_j\psi$ mit $\chi_i, \chi_j$ Formeln und $\Gamma = \Gamma'(\chi_i \vee \chi_j)$. Dann gilt $(\chi_i \vee \chi_j) \in T_\Gamma$. Somit ist $T_\Gamma$. □

Falls die Regeln (TND) $\mathfrak{K}$-ableitbar wäre, so würde $\vdash_{\mathfrak{K}} (\varphi \vee \neg\varphi)$ für alle Formeln gelten. Aber dies widerspricht der Behauptung.

**Aufgabe 58.**

**Behauptung.** Sei $\{\Phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine aufsteigende Folge von widerspruchsfreien Mengen. Dann ist $\Phi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$ widerspruchsfrei.

*Beweis.* Angenommen $\Phi$ ist widerspruchsvoll. Dann gibt es mit Lemma 4.7.4 aus EFT eine endliche Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$, die widerspruchsvoll ist. Da $\Psi$ endlich ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $\Psi$ eine Teilmenge von $\Phi_n$ ist. Aber dann ist $\Phi_n$ widerspruchsvoll und das ist ein Widerspruch. Also ist $\Phi$ widerspruchsfrei. □

Die Behauptung gilt auch, wenn wir eine Aufsteigende Folge von Symbolmengen $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$ haben und $\Phi_n$ eine widerspruchsfreie Menge von $S_n$-Formeln ist. Siehe Lemma 4.7.7 aus EFT.

**Aufgabe 59.** Sei $S_{=}\{+,\cdot,0,1\}$, sei $\varphi_K$ die Konjunktion der Körperaxiome und seien

$$\chi_n := \underbrace{1+\cdots+1}_{n-\text{mal}} \equiv 0 \text{ und } \psi_n := (\cdots(\neg\chi_1 \wedge \neg\chi_2) \wedge \cdots \wedge \neg\chi_n).$$

Dann gilt $\psi_n$ in einem Körper genau dann, wenn seine Charakteristik größer als $n$ ist.

**Behauptung.** Die Klasse der Körper positiver Charakteristik (als $S$-Strukturen) ist nicht axiomatisierbar.

*Beweis.* Angenommen die Klasse der Körper mit endlicher Charakteristik wäre axiomatisierbar. Sei $\Phi$ eine Menge von Formel die die Klasse axiomatisiert. Wir betrachten $\Phi' := \Phi \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist jede endliche Teilmenge von $\Phi'$ erfüllbar. Nach dem Kompaktheitssatz ist dann auch $\Phi'$ erfüllbar. Somit gibt es einen Körper mit Charakteristik Null der $\Phi$ erfüllt. Aber dies ist ein Widerspruch. $\square$

**Behauptung.** Die Klasse der Körper von Charakteristik Null (als $S$-Strukturen) ist axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar.

*Beweis.* Sei $\Phi := \{\varphi_K\} \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann axiomatisiert $\Phi$ die Klasse der Körper von Charakteristik Null. Angenommen die Klasse wäre endlich axiomatisierbar. Sei $\varphi$ eine Formel die die Klasse axiomatisiert. Dann gilt $\Phi \models \varphi$. Nach dem Kompaktheitssatz gibt es ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \varphi$. Somit gilt $\varphi$ in allen Körpern mit hinreichend großer Charakteristik. Aber das ist ein Widerspruch. $\square$

**Aufgabe 60.**

(a) Ja, dies ist eine Anwendung des Kompaktheitssatz. Siehe Satz 6.2.2 aus EFT.

(b) Nein, dies ist keine Anwendung des Kompaktheitssatz. Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ.

(c) Ja, dies ist eine Anwendung des Kompaktheitssatz. Vergleiche Vorlesung XXII Seite 15f oder 6.3.4 aus EFT.

(d) Nein, dies ist keine Anwendung des Kompaktheitssatz. Die Klasse der unendlichen Ringe ist axiomatisierbar. Vergleiche Aufgabe 59 (b).

(e) Ja, dies ist eine Anwendung des Kompaktheitssatz. Siehe 6.3.6 aus EFT.

(f) Nein, dies ist keine Anwendung des Kompaktheitssatz. Hier ist das Problem dass $n$ im ersten Teil beliebig groß wird, aber im zweiten Teil fest ist.