Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 9

Abgabe am 30. Juni 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

(44) Wir erinnern an die Definitionen der Ordnungssumme und des Ordnungsprodukts aus Aufgabe (33). Falls $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{X}_1$ strikte lineare Ordnungen sind, so schreiben wir $\mathfrak{X}_0 \oplus \mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_0 \otimes \mathfrak{X}_1$ für die Summen- und Produktordnung. Zeigen Sie: wenn $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{X}_1$ Wohlordnungen sind, so auch $\mathfrak{X}_0 \oplus \mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_0 \otimes \mathfrak{X}_1$.

(45) Sei X eine Menge und $\in_X$ die binäre Elementrelation auf X. Zeigen Sie, daß die folgenden fünf Aussagen äquivalent sind:

(i) X ist eine transitive Menge (also: wenn $x \in X$ und $y \in x$, so $y \in X$);

(ii) $\bigcup X \subseteq X$;

(iii) jedes Element von X ist eine Teilmenge von X;

(iv) für jedes Element $x \in X$ gilt, daß $\in_X[x] = x$.

(46) Lösen Sie Aufgabe III.5.2.3 aus dem Buch von Ebbinghaus:

5.2.3 Man beweise $\cup$-**Ax** aus $\mathbf{ZF}^0$ ohne $\cup$-**Ax**. (Hinweis: Man beweise das Paarmengenaxiom.)

(47) Lösen Sie Aufgaben VI.2.11.7, VI.2.11.8 und VI.3.4.1 aus dem Buch von Ebbinghaus (arbeiten Sie in der Theorie ZF^0):

2.11.7 Jede Limeszahl ist Supremum einer Menge von Nachfolgerzahlen.

2.11.8 Es gibt eine Limeszahl δ, die das Supremum einer Menge von Limeszahlen $< \delta$ ist.

3.4.1 Die Limeszahlen bilden keine Menge.

(48) Es sei X eine Menge und F eine funktionale Mengenzuordnung, also eine Formel in zwei freien Variablen Φ, so daß für alle Mengen x eine eindeutige Menge $F(x)$ existiert mit $\Phi(x, F(x))$. Dann schreiben wir $\#(X, F)$ für die folgenden *Rekursionsgleichungen*:

$$\begin{aligned} H(0) &= X; \\ H(\alpha+1) &= F(H(\alpha)); \\ H(\lambda) &= F(H{\restriction}\lambda) && \text{falls } \lambda \text{ Limeszahl ist.} \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede Ordinalzahl μ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion H_μ mit $\mathrm{Def}(H_\mu) = \mu$, welche $\#(X, F)$ auf ihrem Definitionsbereich erfüllt.

(b) Falls $\nu < \mu$, so ist $H_\mu{\restriction}\nu = H_\nu$.

(49) Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Ordinalzahlarithmetik:

(a) $\omega + 5 \neq 5 + \omega = \omega$,

(b) $\omega \cdot 7 \neq 7 \cdot \omega = \omega$,

(c) $(\omega + 1) \cdot \omega = \omega \cdot \omega$,

(d) $\omega + (\omega \cdot \omega) = \omega \cdot \omega$ und

(e) für alle α, β und γ gilt $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.