Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 5

Abgabe am 26. Mai 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

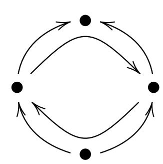
(21) Sei $S = \{\in\}$ und $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine beliebige S-Struktur. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A}$ kein Modell der Mengenlehre sein kann, wenn

(a) die Relation E symmetrisch ist oder

(b) die Relation E transitiv ist,

indem Sie jeweils eine Liste von Axiomen angeben, die nicht erfüllt sein können, wenn E die genannte Eigenschaft hat.

(22) Sei $S = \{\in\}$ und $\mathfrak{A} = (A, E)$ die folgende S-Struktur:



Überprüfen Sie, welche der von uns bisher diskutierten Axiome in diesem Modell gelten.

(23) Zusätzlich zu den im Buch von Ebbinghaus angegebenen Axiomen wollen wir

$$\forall x \exists s \forall z (z \in s \leftrightarrow z \equiv x) \text{ und} \tag{Einer}$$
$$\forall x \forall y \exists p \forall z (z \in p \leftrightarrow (z \equiv x \lor z \equiv y) \tag{Paar}$$

betrachten. Definieren Sie die Axiomensysteme

$$\begin{aligned} T_0 &:= (\text{Ext})+(\text{Aus}), \\ T_1 &:= T_0 + (\text{Paar}), \\ T_2 &:= T_1 + (\textstyle\bigcup\text{-Ax}), \\ T_3 &:= T_0 + (\text{Einer})+(\cup\text{-Ax}) \end{aligned}$$

und zeigen Sie:

(a) $T_0 \not\models T_1$,

(b) $T_0 \not\models T_3$,

(c) $T_2 \models T_3$ und

(d) $T_3 \models T_1$.

(24) Sei $S = \{\in\}$. Wir definieren per Rekursion eine Folge von endlichen S-Strukturen. Die Elemente unserer Strukturen sind natürliche Zahlen.

(a) Sei $A_0 := \{0\}$ und $E_0 := \varnothing$. Wir setzen $\mathfrak{A}_0 := (A_0, E_0)$.

(b) Angenommen, $\mathfrak{A}_i := (A_i, E_i)$ ist bereits definiert und A_i ist endlich mit $A_i = \{0, 1, ..., n_i\}$. Sei $Z := [A_i]^{\leq 2}$ die Menge der höchstens zweielementigen Teilmengen von A_i. Da A_i endlich war, ist auch Z endlich. Ein Element $X \in Z$ heisse *bedient*, falls es ein $b \in A_i$ gibt, so daß für alle $a \in A_i$ gilt:

$$a \in X \iff a \, E_i \, b.$$

Wir betrachten die endliche Menge

$$N_i := \{X \in Z \,;\, X \text{ ist nicht bedient}\}$$

und schreiben $k_i := |N_i|$, sowie $N_i := \{X_1, ..., X_{k_i}\}$.

(c) Wir definieren nun $A_{i+1} := A_i \cup \{n_i + 1, ..., n_i + k_i\} = \{0, 1, ..., n_i + k_i\}$,

$$E_{i+1} := E_i \cup \{(a, b) \,;\, a \in X_j \text{ und } b = n_i + j \text{ für ein } j\}$$

und $\mathfrak{A}_{i+1} := (A_{i+1}, E_{i+1})$.

Zeichnen Sie die Strukturen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$. Ist es möglich, daß es ein $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $A_i = A_{i+1}$?

(25) Falls $\mathfrak{A} = (A, E_A)$ und $\mathfrak{B} := (B, E_B)$ zwei S-Strukturen sind, so sagen wir, daß $\mathfrak{B}$ eine *Enderweiterung* von $\mathfrak{A}$ ist, falls $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ (Substruktur) und für $a, b \in B$ gilt: falls $a \in A$ und $b \, E_B \, a$, so ist $b \in A$.

Wir betrachten die in Aufgabe (24) definierten Strukturen $\mathfrak{A}_i$. Zeigen Sie, daß für $i \leq j \in \mathbb{N}$ die Struktur $\mathfrak{A}_j$ eine Enderweiterung von $\mathfrak{A}_i$ ist.

(26) Seien $\{\mathfrak{A}_i \,;\, i \in \mathbb{N}\}$ die in Aufgabe (24) definierten Strukturen. Definieren Sie $E_\infty := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ und $\mathfrak{A}_\infty := (\mathbb{N}, E_\infty)$ und zeigen Sie, daß in $\mathfrak{A}_\infty$ (Ext), (Paar), (Einer), und (Aus), aber nicht (Pot), ($\cup$-Ax) und ($\bigcup$-Ax) gelten.