Abgabe am 19. Mai 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

(16) Eine S-Formel heiße $*$-*universell*, falls in ihr die Symbole $\neg$, $\to$, $\leftrightarrow$ und $\exists$ nicht auftauchen. Ist jede universelle Formel $*$-universell? Ist jede $*$-universelle Formel universell? Begründen Sie Ihre Antworten.

(17) Sei S eine Symbolmenge und $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur. Eine Teilmenge $X \subseteq A^n$ heißt *S-definierbar über $\mathfrak{A}$*, wenn es eine S-Formel φ mit freie Variablen $x_1, ..., x_n$ gibt, so daß für alle $\vec{a} := (a_1, ..., a_n) \in A^n$ gilt, daß $\vec{a} \in X$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{a_1}{x_1} \dots \frac{a_n}{x_n}$.

Sei $S := \{\dot{0}, \dot{+}, \dot{\times}\}$ mit einem Konstantensymbol $\dot{0}$ und zwei binären Funktionssymbolen $\dot{+}$ und $\dot{\times}$. Betrachten Sie $S_0 := \varnothing$, $S_1 := \{\dot{0}\}$, $S_2 := \{\dot{0}, \dot{+}\}$ und $S_3 := S$, sowie $A := \mathbb{Z}$ und $\mathfrak{a}(\dot{0}) = 0$, $\mathfrak{a}(\dot{+}) := +$ und $\mathfrak{a}(\dot{\times}) := \cdot$. Sei $\mathfrak{A} := (A, \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{A}_i$ das S_i-Redukt von $\mathfrak{A}$ (für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$).

Entscheiden Sie für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$, ob sie S_i-definierbar über $\mathfrak{A}_i$ (für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$) sind und geben Sie eine Begründung:

	$\mathfrak{A}_0$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$
$X_0 := \{0\}$	???	???	???	???
$X_1 := \{1\}$	???	???	???	???
$X_2 := 2\mathbb{Z}$	???	???	???	???

(18) Sei S eine Symbolmenge und $R \notin S$ ein Relationssymbol. Falls $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur ist und $\mathfrak{A}^* = (A, \mathfrak{a}^*)$ eine $S \cup \{R\}$-Struktur ist, so nennen wir $\mathfrak{A}^*$ eine *relationale Definitionserweiterung* von $\mathfrak{A}$, falls $\mathfrak{A}$ das S-Redukt von $\mathfrak{A}^*$ ist und $\mathfrak{a}^*(R)$ eine S-definierbare Teilmenge von A^n ist.

Sei $\mathrm{Pos} := \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x > 0\}$ und $+$, $\cdot$ und $<$ die üblichen Operationen und Relationen auf $\mathbb{Q}$.

(a) Ist die Struktur $(\mathbb{Q}, +, <)$ eine relationale Definitionserweiterung von $(\mathbb{Q}, +)$?

(b) Ist die Struktur $(\mathbb{Q}, +, \mathrm{Pos}, <)$ eine relationale Definitionserweiterung von $(\mathbb{Q}, +, \mathrm{Pos})$?

(c) Ist die Struktur $(\mathbb{Q}, \cdot, <)$ eine relationale Definitionserweiterung von $(\mathbb{Q}, \cdot)$?

(19) Definieren Sie $\exists^{=1}x\varphi$ als Abkürzung für $\exists x(\varphi \wedge \forall y(\varphi\frac{y}{x} \rightarrow y \equiv x))$, wobei $y \notin \text{frei}(\varphi)$, und zeigen Sie, daß für jede Interpretation $\mathfrak{I} = (A, \mathfrak{a}, \beta)$ gilt:

$$\mathfrak{I} \models \exists^{=1}x\varphi \text{ genau dann, wenn es genau ein } a \in A \text{ gibt mit } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi.$$

(Vgl. S. 59 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas.)

(20) Lösen Sie Aufgabe 3.8.9 aus dem Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

3.8.9 Aufgabe Seien P und f zweistellig und $x = v_0, y = v_1, u = v_2, v = v_3$ und $w = v_4$. Man zeige anhand der Definition 3.8.2:

(a) $\exists x\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ u\ u}{x\ y\ v} = \exists x\exists y(Pxu \wedge Pyu)$,

(b) $\exists x\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv}{u\ \ v} = \exists x\exists y(Pxv \wedge Pyfuv)$,

(c) $\exists x\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ x\ fuv}{x\ u\ \ v} = \exists w\exists y(Pwx \wedge Pyfuv)$,

(d) $(\forall x\exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists ufuu \equiv x)\frac{x\ fxy}{x\ \ u} =$
$\forall v\exists w(Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists ufuu \equiv x$.