Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 2

Abgabe am 5. Mai 2020 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=273` .

(6) Sei S eine Symbolmenge. Wir definieren durch Rekursion auf dem Formelaufbau eine Funktion $\mathrm{qt} : L^S \to \mathbb{N}$ ("Quantorentiefe"):

$$\begin{aligned}
\mathrm{qt}(\varphi) &:= 0, \text{ falls } \varphi \text{ atomar ist,}\\
\mathrm{qt}(\varphi \wedge \psi) &:= \max\{\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)\},\\
\mathrm{qt}(\varphi \vee \psi) &:= \max\{\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)\},\\
\mathrm{qt}(\varphi \to \psi) &:= \max\{\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)\},\\
\mathrm{qt}(\neg\varphi) &:= \mathrm{qt}(\varphi),\\
\mathrm{qt}(\exists x\varphi) &:= \mathrm{qt}(\varphi) + 1, \text{ und}\\
\mathrm{qt}(\forall x\varphi) &:= \mathrm{qt}(\varphi) + 1.
\end{aligned}$$

Wir setzen $Q_n^S := \{\varphi \in L^S\,;\, \mathrm{qt}(\varphi) \leq n\}$. Zeigen Sie, daß $L^S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n^S$ eine strikt aufsteigende Vereinigung von Mengen ist (also $Q_n^S \subsetneqq Q_{n+1}^S$) und daß das folgende Induktionsprinzip gilt:

Sei $Z \subseteq L^S$ eine Menge mit den folgenden Eigenschaften: (a) $Q_0^S \subseteq Z$ und (b) für jedes n gilt, falls $Q_n^S \subseteq Z$, so auch $Q_{n+1}^S \subseteq Z$. Dann ist $Z = L^S$.

(7) Beweisen Sie Teil (b) von Lemma 2.4.2. im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **2.4.2 Lemma** (a) *Für alle Terme t, t' gilt: t ist kein echtes Anfangsstück von t' (d.h., es gibt kein von $\square$ verschiedenes ζ mit $t\zeta = t'$).*
> (b) *Für alle Ausdrücke φ, φ' gilt: φ ist kein echtes Anfangsstück von φ'.*

(8) Lösen Sie Aufgabe 2.4.7 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **2.4.7 Aufgabe** Man modifiziere den Ausdruckskalkül, indem man in 2.3.2 (A4) die Klammern fortlässt, also etwa für „$(\varphi \wedge \psi)$“ einfach „$\varphi \wedge \psi$“ schreibt. Zum Beispiel ist $\chi := \exists v_0 P v_0 \wedge Q v_1$ ein $\{P, Q\}$-Ausdruck im neuen Sinn. Man zeige, dass das Analogon von 2.4.4 nicht mehr gilt und dass die entsprechend modifizierte Festlegung für TA es erlaubt, $\mathrm{TA}(\chi) = \{\chi, Pv_0 \wedge Qv_1, Pv_0, Qv_1\}$ und $\mathrm{TA}(\chi) = \{\chi, \exists v_0 P v_0, P v_0, Q v_1\}$ zu gewinnen, also keine Funktion mehr definiert.

(9) Lösen Sie Aufgabe 3.3.3 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **3.3.3 Aufgabe** Sei P ein einstelliges Relationssymbol und f ein zweistelliges Funktionssymbol. Für jeden der Ausdrücke
>
> $$\forall v_1 f v_0 v_1 \equiv v_0, \quad \exists v_0 \forall v_1 f v_0 v_1 \equiv v_1, \quad \exists v_0 (P v_0 \wedge \forall v_1 P f v_0 v_1)$$
>
> finde man eine Interpretation, die ihn erfüllt, und eine Interpretation, die ihn nicht erfüllt.

(10) Lösen Sie Aufgabe 3.3.4 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **3.3.4 Aufgabe** Ein Ausdruck, der $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ nicht enthält, heiße *positiv*. Man zeige: Zu jedem positiven S-Ausdruck gibt es eine S-Interpretation, die ihn erfüllt. (Hinweis: Man betrachte eine geeignete Struktur mit einelementigem Träger.)