Mathematische Logik & Mengenlehre

XXI

ZURÜCK ZUR LOGIK

Letzte Vorlesung

Die Kontinuumshypothese CH ist unabhängig von den Axiomen von ZFC:

weder beweist ZFC CH
noch beweist ZFC $\neg$CH.

Ziel – Ableitungsbegriff in der Syntax
– Bezug zw. den beiden Ableitungsbegriffen

$\Longrightarrow$ VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ

Bislang nur den semantischen Folgerungsbegriff:

$ZFC \not\models CH$ $:\Longleftrightarrow$ es ex. ein Modell $\mathcal{M} \models ZFC + \neg CH$.

$ZFC \not\models \neg CH$ $:\Longleftrightarrow$ es ex. ein Modell $\mathcal{M} \models \underbrace{ZFC + \cancel{\neg} CH}_{ZFC + CH}$.

Diese Art von Unabhängigkeitsbeweisen ist recht üblich:

$$A_{Gr} = \varphi_A + \varphi_{NI}$$

Assoziativ

neutral + invers

φ_K ← Kommutativ $(\forall x \forall y \; x+y=y+x)$

Das Kommutativgesetz ist unabhängig von den Gruppenaxiomen:

A_{Gr} beweist nicht φ_K

" $\neg\varphi_K$

$A_{Gr} \nvdash \varphi_K$ ← $\mathcal{G} \vDash A_{Gr} + \neg\varphi_K$ $[S_3]$

$A_{Gr} \nvdash \neg\varphi_K$ ← $\mathcal{G} \vDash A_{Gr} + \varphi_K$ $[\mathbb{Z}_2]$

Was ist denn ein Beweis ?

Intuitive Idee: eine Folge von Aussagen, die mit Axiomen beginnt und bei jede (andere) Aussage aus vorigen folgt.

„aus vorigen folgt":

Regel: $R \subseteq (L^S)^{n+1}$, so daß die Regel uns sagt,

$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi) \in R \iff \varphi$ folgt aus $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$

$\models$

$$\frac{p, \; p \longrightarrow q}{q}$$

Hilbert-Systeme

Next, let's show that $(P \to Q), (Q \to R) \vdash_M (P \to R)$:

1.	$(P \to Q)$	premiss
2.	$(Q \to R)$	premiss
3.	$((Q \to R) \to (P \to (Q \to R)))$	by Ax1
4.	$(P \to (Q \to R))$	from 2, 3 by MP
5.	$((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$	by Ax2
6.	$((P \to Q) \to (P \to R))$	from 4, 5 by MP
7.	$(P \to R)$	from 1, 6 by MP

Let's have an example of an axiomatic system to be going on with. In this system M, to be found e.g. in Mendelson's classic *Introduction to Mathematical Logic*, the only

Setting that out symbolically, we could display the argument like this, arranging things *Fitch-style* (as in a classic 1952 logic text, *Symbolic Logic: an Introduction* by Frederic B. Fitch):

1	$(P \to Q)$	premiss
2	$(Q \to R)$	premiss
3	$\mid$ P	supposition
4	$\mid$ Q	from 3, 1 by MP
5	$\mid$ R	from 4, 2 by MP
6	$(P \to R)$	by the subproof from 3 to 5, by CP

natürliches Schließen: Fitch-Stil

3.5 Another way of laying out proofs

3.5.1 Gentzen-style proofs – the general idea

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P] \quad (P \to Q)}{Q} \quad (Q \to R)}{R}}{(P \to R)}$$

natürliches Schließen: Gentzen-Stil

Types of proof system

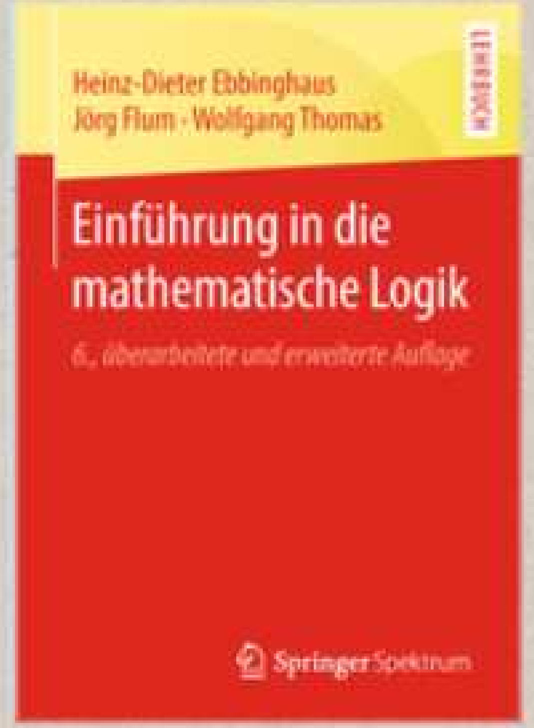
Peter Smith

October 13, 2010

DESIDERAT

Falls $\vdash, \vdash'$ zwei Beweisbarkeits-Systeme sind, dann muß gelten

$\vdash \varphi \iff \vdash' \varphi$.



Wir folgen EFT und verwenden den sogenannten

GENTZENSCHEN SEQUENZENKALKÜL

Def. Eine nichtleere Folge von S-Ausdrücken heißt Sequenz

$$\underbrace{\varphi_1 \dots \varphi_n}_{\text{nichtleere Folge von Ausdrücken}} \; \varphi$$

ANTEZEDENZ

SUKZEDENZ

interpretiert als

UNTER VORAUSSETZUNG VON $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ GILT φ.

Einige Autoren schreiben $\varphi_1 \dots \varphi_n \Rightarrow \varphi$

Die Menge aller Sequenzen bezeichnen wir mit Seq.

Wir sagen ψ ist ein Glied einer Folge $\Delta = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von Ausdrücken, falls ein $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert mit $\psi = \varphi_i$.

Falls Δ eine Folge von Ausdr., so sei

$$T_\Delta := \{\varphi \,;\, \varphi \text{ ist Glied von } \Delta\}$$

Eine Menge $R \subseteq \mathrm{Seq}^{n+1}$ heißt <u>n-stellige Regel</u>

$(\underline{\Delta_1\varphi_1, \dots, \Delta_n\varphi_n}, \Delta\varphi)$

interpretiert als: falls $\Delta_1\varphi_1, \dots, \Delta_n\varphi_n$ bereits gezeigt sind, dann darf ich auf $\Delta\varphi$ übergehen.

<u>Schreibweise</u>

$$\frac{\begin{matrix}\Delta_1\varphi_1\\ \vdots \\ \Delta_n\varphi_n\end{matrix}}{\Delta\varphi}$$

<u>Beispiel</u> 2-stellige Regel

$$\frac{\begin{matrix}\Delta_1\varphi\\ \Delta_1\psi\end{matrix}}{\Delta_1(\varphi\wedge\psi)}$$

"sinnvoll"

sollte definiert werden

<u>Hinweis</u> $n=0$ ist möglich

$$\boxed{\frac{\quad}{\Delta\varphi}}$$

Der Fall $n=0$ entspricht den "Axiomen" unseres Systems.

Def. Ein **Kalkül** ist eine (üblicherweise endliche) Menge von Regeln.

Falls $\Delta\varphi$ eine Sequenz ist und $\mathfrak{K}$ ein Kalkül, so sagen wir, daß eine Folge von Sequenzen $S_1, S_2, \dots, S_n = \Delta\varphi$ eine **$\mathfrak{K}$-Ableitung** von $\Delta\varphi$ ist, falls für alle $i \leq n$ gilt: es ex. eine k-stellige Regel $R \in \mathfrak{K}$ und $i_1, \dots, i_k < i$ mit

$$(S_{i_1}, \dots, S_{i_k}, S_i) \in R.$$

Bemerkung Falls $\mathfrak{K}$ keine 0-stelligen Regeln hat, dann gibt es keine Ableitungen.

Def. $\vdash_{\mathfrak{K}} \Delta\varphi \;:\Longleftrightarrow$ es gibt eine $\mathfrak{K}$-Ableitung von $\Delta\varphi$

$\Delta\varphi$ ist **$\mathfrak{K}$-ableitbar**

ZWEITES DESIDERAT:
Falls $\vdash_{\mathfrak{K}} \Delta\varphi$, so sollte gelten ~~$\Delta \models \varphi$~~ $T_\Delta \models \varphi$.

Folge

Def. ~~Eine Sequenz~~ $\Delta\varphi$ heißt korrekt, falls $T_\Delta \models \varphi$.

Eine Regel R heißt korrekt, falls für alle $(\Delta_1\varphi_1, \ldots, \Delta_n\varphi_n, \Delta\varphi) \in R$ gilt, wenn $\Delta_1\varphi_1, \ldots \Delta_n\varphi_n$ korrekt sind, so auch $\Delta\varphi$.

Ein Kalkül heißt korrekt, wenn alle seine Regeln korrekt sind.

ZIEL Angabe eines korrekten Kalküls

LEMMA Falls $\mathfrak{K}$ ein korrekter Kalkül ist und $\vdash_{\mathfrak{K}} \Delta\varphi$, so ist $\Delta\varphi$ korrekt (also $T_\Delta \models \varphi$).

Def. Falls Φ eine Menge von Ausdrücken ist, $\mathfrak{K}$ ein Kalkül, so schreiben wir

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$$

["φ folgt syntaktisch aus Φ (in $\mathfrak{K}$)"
"Φ impliziert syntaktisch φ (in $\mathfrak{K}$)"]

falls ein Γ existiert mit $T_\Gamma \subseteq \Phi$ und

$$\vdash_{\mathfrak{K}} \Gamma\varphi$$

Bemerkung. Es folgt unmittelbar: Falls $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so existiert eine endliche Menge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, so daß $\Phi_0 \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$.

Beweis. Setze $\Phi_0 := T_\Gamma$ in der Definition von

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi.$$

DER GENTZEN-KALKÜL.

4.2.2 Voraussetzungsregel (Vor)

0-stellig

$$\frac{}{\Gamma \quad \varphi}\text{, falls } \varphi \text{ ein Glied von } \Gamma \text{ ist.}$$

$(\varphi \wedge \psi)\ (\psi \wedge \varphi)$

korrekte Sequenz, aber nicht mit (Vor) ableitbar.

Nachweis, daß (Vor) korrekt ist.

(Vor) ist korrekt gdw f.a. $S_1, \dots, S_n, S \in$ (Vor) gilt: $n=0$

falls $S_1, \dots, S_n$ korrekt sind, so auch S.

Bleibt zu zeigen: $\varphi \in T_\Gamma$, so ist $\Gamma\varphi$ korrekt. ($\Longleftrightarrow T_\Gamma \models \varphi$)

$\Longleftrightarrow$ f.a. $\mathfrak{A}$

$\underbrace{\mathfrak{A} \models T_\Gamma}$ $\Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$

f.a. $\psi \in T_\Gamma$

$\mathfrak{A} \models \psi$.

Also ist (Vor) korrekt.

4.2.1 Antezedensregel (Ant)

1-stellige Regel

$$\frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \quad \varphi}$$, *falls jedes Glied von* Γ *ein Glied von* Γ' *ist* (*kurz: falls* $\Gamma \subseteq \Gamma'$).

$T_\Gamma \subseteq T_{\Gamma'}$.

Korrektheitsnachweis

Ang. $\Gamma\varphi$ ist korrekt: $T_\Gamma \models \varphi$.

Zu zeigen $\Gamma'\varphi$ ist korrekt. $T_{\Gamma'} \supseteq T_\Gamma$. $\Longrightarrow$ $T_{\Gamma'} \models \varphi$. ✓

4.2.3 Fallunterscheidungsregel (FU)

2-stellige Regel

Korrektheitsnachweis

$$\frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & & \varphi\end{array}}$$

Ang. $\left.\begin{array}{l}\Gamma\psi\varphi \\ \Gamma\neg\psi\varphi\end{array}\right\}$ korrekt

$*\ T_\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ $\quad *\ T_\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$

Sei nun $\mathfrak{I} \models T_\Gamma$. Fall 1 $\mathfrak{I} \models \psi$: $* \Longrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi$

Fall 2 $\mathfrak{I} \models \neg\psi$ $* \Longrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi$.

4.2.4 Widerspruchsregel (Wid)

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \neg\varphi & \psi \\ \Gamma & \neg\varphi & \neg\psi \\ \hline \Gamma & & \varphi \end{array}$$

2-stellige Regel

Korrektheitsnachweis

Ang. $\Gamma \neg\varphi \psi$, $\Gamma \neg\varphi \neg\psi$ sind korrekt.

D.h. für jede Int. $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ gilt:

$$\cancel{\mathfrak{I} \models \psi \text{ und } \mathfrak{I} \models \neg\psi.}$$

$\Longrightarrow$ es gibt keine Int. $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Zu zeigen: $\Gamma\varphi$ ist korrekt:

$T_\Gamma \models \varphi$ Ang. nicht: sei $\mathfrak{I} \models T_\Gamma$, mit

$\mathfrak{I} \not\models \varphi$

$\Longleftrightarrow \mathfrak{I} \models \neg\varphi$

$\Longrightarrow \mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Widerspruch!

Bisher:

(Vor), (Ant), (FU), (Wid).

ABLEITBARE REGELN

1. Bemerkung:

4.3.1 Modifizierte Widerspruchsregel (Wid')

2-stellige

$$\frac{\Gamma \quad \psi \qquad \Gamma \quad \neg\psi}{\Gamma \quad \varphi}$$

Rechtfertigung.

1.	Γ		ψ	Prämisse
2.	Γ		$\neg\psi$	Prämisse
3.	Γ	$\neg\varphi$	ψ	(Ant) auf 1.
4.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	(Ant) auf 2.
5.	Γ		φ	(Wid) auf 3., 4.

(Vor)
(Ant)
(FU)
(Wid)

Def. Sei $\breve{K}$ ein Kalkül und R eine Regel. Dann ist R in $\breve{K}$ ableitbar wenn für alle $(S_1, \dots, S_n, S) \in R$ gilt: falls $\vdash_{\breve{K}} S_1, \dots, \vdash_{\breve{K}} S_n$, so $\vdash_{\breve{K}} S$.

Beobachtung Falls $\breve{K}$ ein Kalkül und R in $\breve{K}$ ableitbar und $\breve{K}' := \breve{K} \cup \{R\}$.

Dann gilt $\vdash_{\breve{K}} \varphi \iff \vdash_{\breve{K}'} \varphi$.

4.3.2 Kettenschlussregel (KS)

2-stellig

$$\begin{array}{lll} \Gamma & & \varphi \\ \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array}$$

Rechtfertigung.

1.	Γ		φ	Prämisse
2.	Γ	φ	ψ	Prämisse
3.	Γ	$\neg\varphi$	φ	(Ant) auf 1.
4.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	(Vor)
5.	Γ	$\neg\varphi$	ψ	(Wid') auf 3., 4.
6.	Γ		ψ	(FU) auf 2., 5.

Ableitbarkeit von Regeln ist transitiv:

R in $\mathfrak{K}$ ableitbar

$\mathfrak{K}' := \mathfrak{K} \cup \{R\}$

R' in $\mathfrak{K}'$ ableitbar

$\Longrightarrow R'$ in $\mathfrak{K}$ ableitbar.

2. Bemerkung

(Ant)

(Vor)

(FW)

(Wid)

[oBdA (Wid')
(KS)']

Definition: Φ ist widerspruchsfrei in $\mathfrak{K}$, falls für kein φ gilt $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi$.

Φ ist widersprüchlich in $\mathfrak{K}$, falls ein φ existiert, so daß $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi$.

Beobachtung: Falls Φ widersprüchlich, so ex. endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit Φ_0 widersprüchlich.

[$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \Longrightarrow$ ex. $\Phi_1 \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, $\Phi_1 \subseteq \Phi$ endlich

$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi \Longrightarrow$ ex. $\Phi_2 \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi$, Φ_2 endlich $\subseteq \Phi$

$\Longrightarrow \Phi_0 := \Phi_1 \cup \Phi_2$

$\Phi_0 \vdash \varphi$ und $\Phi_0 \vdash \neg\varphi$.]

Falls $\mathfrak{K}$ (Ant), (Wid') enthält.

<u>Beh.</u> Äquivalent sind:

(i) Φ ist widersprüchlich

(ii) für alle ψ gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \psi$.

EXPLOSION

<u>Beweis.</u> (ii) $\Rightarrow$ (i). Offensichtlich.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Ann. $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi$.

$$\vdash_{\mathfrak{K}} \Gamma_1 \varphi \qquad\qquad \vdash_{\mathfrak{K}} \Gamma_2 \neg\varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \varphi}{\Gamma_1 \Gamma_2 \varphi}\ (\text{Ant}) \qquad \dfrac{\Gamma_2 \neg\varphi}{\Gamma_1 \Gamma_2 \neg\varphi}\ (\text{Ant})}{\Gamma_1 \Gamma_2 \psi}\ (\text{Wid}').$$