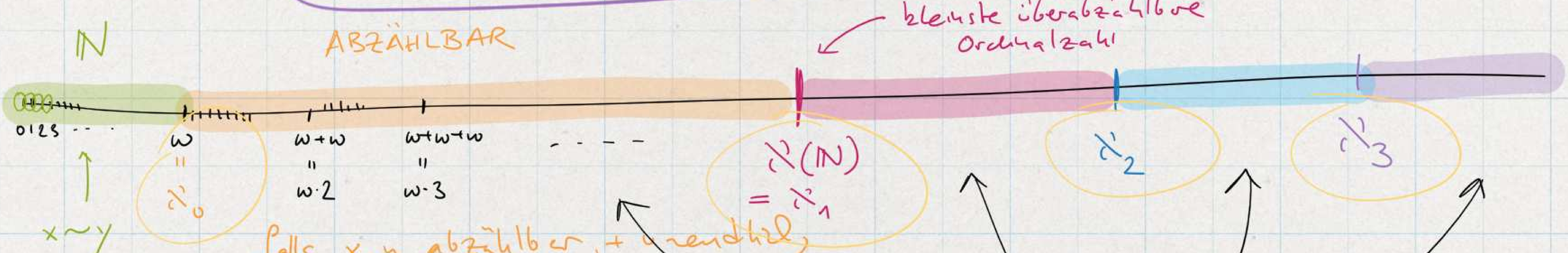
MLML VORLESUNG XX



$x \sim y \Rightarrow x = y$

falls x, y abzählbar, + unendlich, so $x \sim y$.

Äquivalenzklassen der Gleichmächtigkeit.

X ist <u>wohlordenbar</u> falls ein $R \subseteq X \times X$ existiert mit (X,R) Wohlordnung.

Die Alephs messen die Größe aller wohlordenbaren Mengen.

SATZ Sei X eine Menge. Dann sind äquivalent:

(i) X ist wohlordenbar

(ii) $\exists \alpha$ Ord. $X \sim \alpha$

(iii) $\exists \alpha$ Ord. $X \preccurlyeq \alpha$

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (iii) trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Falls $f : X \longrightarrow \alpha$ inj. Definiere $R_f \subseteq X \times X$ durch

$$x R_f y :\Longleftrightarrow f(x) \in f(y).$$

Dann ist $f : (X, R_f) \cong (\mathrm{Bild}(f), \in)$ ← Wohlordnung

Also ist X wohlordenbar.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Auch REPRÄSENTATIONSSATZ FÜR WOHLORDNUNGEN

Da X wohlordenbar, ex. R mit (X, R) Wohlordnung.

Setze $\alpha := \aleph(X)$ ← kl. Ord. so daß $\aleph(X) \not\preccurlyeq X$

Vergleiche (X,R) mit $(\alpha,\in)$ über den Fundamentalsatz:

also entweder (1) (X,R) iso zu AS von $(\alpha,\in)$

oder (2) ~~$(\alpha,\in)$ iso zu AS von (X,R)~~

[Falls $h: \alpha \cong R[w]$, so ist dies eine Inj $\alpha \preceq X$.]

AS von Ord.z. sind Ord.z., also folgt die Beh. aus (1)

q.e.d.

Bem. Falls (W,R) Wohlordnung, so ist α mit $(W,R) \cong (\alpha,\in)$ eindeutig bestimmt.

[$(\beta,\in) \cong (W,R) \cong (\alpha,\in) \Longrightarrow (\beta,\in) \cong (\alpha,\in) \Longrightarrow \alpha=\beta.$]

Also natürliche Frage:

Ist jede Menge wohlordenbar?

[Erinnerung an das Hilbert-Zitat (1900).]

DAS AUSWAHLAXIOM

Auswahlaxiom (**AC**, **A**xiom of **C**hoice):

Zu jeder Menge X von nicht leeren, zueinander disjunkten Mengen gibt es eine Menge, die von jedem Element von X genau ein Element enthält.

Also:

$$\forall X \Big(\forall xy \, (x \in X \wedge y \in X \to x \neq \emptyset \wedge (x = y \vee x \cap y = \emptyset)) \\ \to \exists Y \forall x \, (x \in X \to \exists z \, Y \cap x = \{z\}) \Big).$$

AUSWAHLMENGE FÜR X.

Es sei noch eine andere sehr merkwürdige Behauptung Cantors erwähnt, die mit dem genannten Satze in engstem Zusammenhange steht und die vielleicht den Schlüssel zum Beweise dieses Satzes liefert. Cantor betrachtet nun eine besondere Art von geordneten Mengen, die er als wohlgeordnete Mengen bezeichnet und die dadurch charakterisirt sind, daß nicht nur in der Menge selbst, sondern auch in jeder Teilmenge eine früheste Zahl existirt. Das System der ganzen Zahlen 1, 2, 3, … in dieser seiner natürlichen Ordnung ist offenbar eine wohlgeordnete Menge. Dagegen ist das System aller reellen Zahlen, d. h. das Continuum in seiner natürlichen Ordnung offenbar nicht wohlgeordnet. Es erhebt sich nun die Frage, ob sich die Gesamtheit aller Zahlen nicht in anderer Weise so ordnen läßt, daß jede Teilmenge ein frühestes Element hat, d. h. ob das Continuum auch als wohlgeordnete Menge aufgefaßt werden kann, was Cantor bejahen zu müssen glaubt. Es erscheint mir höchst wünschenswert, *einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von Cantor zu gewinnen*, etwa durch wirkliche Angabe einer solchen Ordnung der Zahlen, bei welcher in jedem Teilsystem eine früheste Zahl aufgewiesen werden kann.

David **Hilbert**: *Mathematische Probleme.* In: Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse. Heft 3, 1900, S. 253–297.

1.2 Definition. *f ist eine Auswahlfunktion auf X* $:\leftrightarrow$ f ist eine Funktion mit $\mathrm{Def}(f) = X$ und $\forall x\,(x \in X \wedge x \neq \emptyset \rightarrow f(x) \in x)$.

1.3 Satz. Auf der Basis von **ZF** (sogar von $\mathbf{Z}^0$) sind äquivalent:

(i) **AC**.

(ii) *Auf der Potenzmenge einer jeden Menge gibt es eine Auswahlfunktion.*

(iii) *Auf jeder Menge gibt es eine Auswahlfunktion.*

X nichtleeren, pw. disjunkten Mengen

Y AUSWAHLMENGE für X

falls $\forall x \in X$

$|x \cap Y| = 1$.

X ist eine Menge von Mengen

$x \in X$ ist $f(x) \in x$

[außer $x = \emptyset$]

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii). Betrachte $\mathrm{Pot}(X)$. Suchen eine Auswahlfunktion.

$Z := \{ \{z\} \times z \,;\; z \in \mathrm{Pot}(X) \setminus \{\emptyset\} \}$

Z ist eine Menge von nichtleeren pw. disjunkten Mengen.

Also sei Y Auswahlmenge

Falls $z \in \mathrm{Pot}(X)\setminus\{\emptyset\}$, so ist $Y \cap \{z\} \times z = \{(z, \xi)\}$

wobei $\xi \in z$.

Setze $f := Y \cup \{(\emptyset, \emptyset)\}$. Dann ist f Auswahlfkt. für $\mathrm{Pot}(X)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei X eine beliebige Menge.

$$X \subseteq \mathrm{Pot}\left(\bigcup X\right)$$

[falls $x \in X$, so ist $x \subseteq \bigcup X$]

Also gibt uns eine Auswahlfkt. für $\mathrm{Pot}\left(\bigcup X\right)$ eine Auswahlfunktion für X.

(iii) $\Rightarrow$ (i). X eine Menge von nichtleeren pw. disj. Mengen

Sei f eine Auswahlfkt. für X.

Dann ist $\mathrm{Bild}(f)$ eine Auswahlmenge für X.

q.e.d.

Lemma Falls X wohlordenbar ist, so existiert eine Auswahlfkt. auf $\mathrm{Pot}(X)$.

[Dieser Beweis braucht kein AC.]

Beweis Es ex. R mit (X,R) Wohlordnung.

[f.a. $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ ex. ein R-minimales Element]

$(A,x) \in f \iff (A=\emptyset \wedge x=\emptyset)$

oder $(A \neq \emptyset \wedge x$ ist das R-minimale Elt von $A)$

Dies definiert eine Auswahlfkt.

q.e.d.

Theorem (Zermelo 1904/8)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent in ZF°:

ZERMELOSCHER WOHLORDNUNGSSATZ

(1) AC

(2) Jede Menge ist wohlordenbar.

Beweis

$(2) \Rightarrow (1)$

Folgt direkt aus "X wohlordenbar $\Rightarrow$ Ausw.fkt. für Pot(X)" und Satz 1.3.

$(1) \Rightarrow (2)$ Sei X eine beliebige Menge.

Eine Auswahlfkt. für Pot(X) gibt mir die Möglichkeit, jeweils das "nächste" Element auszuwählen.

Wir wählen $\underline{\alpha := \aleph(X)}$. Sei STOP eine Menge mit STOP $\notin X$.

Sei $f : \mathrm{Pot}(X) \longrightarrow X \cup \{\mathrm{STOP}\}$ eine Auswahlfunktion mit der Eigenschaft $f(\emptyset) = \mathrm{STOP}$.

Definiere per Rekursion eine Funktion

$$g : \alpha \longrightarrow X \cup \{\mathrm{STOP}\}$$

mit

$$g(\gamma) := f(X \setminus \mathrm{Bild}(g \upharpoonright \gamma))$$

<u>Eigenschaft</u> Falls STOP $\notin \mathrm{Bild}(g\upharpoonright\gamma)$, so ist $g\upharpoonright\gamma$ eine injektive Funktion.

[$\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma$ mit $\underset{\mathrm{STOP}}{\underset{\neq}{g(\gamma_0)}} = \underset{\mathrm{STOP}}{\underset{\neq}{g(\gamma_1)}} \Longrightarrow X \setminus \mathrm{Bild}(g\upharpoonright\gamma_0) \neq \emptyset$

$X \setminus \mathrm{Bild}(g\upharpoonright\gamma_1) \neq \emptyset$

Aber $g(\gamma_0) \in \mathrm{Bild}(g\upharpoonright\gamma_1)$

Somit $f(X\setminus \mathrm{Bild}(g\upharpoonright\gamma_1)) = g(\gamma_1) \neq g(\gamma_0)$.]

Beh. Es ex. ein $\gamma < \alpha$ mit

$$g(\gamma) = \text{STOP}$$

[Ang. nicht : STOP $\notin$ Bild(g) $\Longrightarrow$ nach der ersten Eigenschaft ist g eine Injektion

$$g : \alpha \longrightarrow X \text{, also } \aleph(X) = \alpha \leq X \quad \lightning .]$$

Sei nun $\gamma_0 \overset{<\alpha}{}$ minimal mit $g(\gamma_0) = \text{STOP} \Longrightarrow X \setminus \text{Bild}(g\restriction\gamma_0) = \emptyset.$

Nach der ersten Eig. $g\restriction\gamma_0 : \gamma_0 \longrightarrow X$ Injektion

$$\Downarrow$$

$$\text{Bild}(g\restriction\gamma_0) = X.$$

$$\Downarrow$$

$g\restriction\gamma_0$ ist surj.

$$\gamma_0 \sim X$$

$\Longrightarrow$ X ist wohlordenbar

q.e.d.

Zusammenfassend $\quad ZFC^\circ := ZF^\circ + AC$

Dann gilt in ZFC°, daß jede Menge wohlordenbar ist und damit, daß die Aleph-Hierarchie ein gutes Maß für die Größe unendlicher Mengen ist.

$$|X| := \begin{cases} n & \text{falls } X \text{ endlich und } X \sim n \\ \aleph_\alpha & \text{falls } X \text{ unendlich und } \underline{X \sim \aleph_\alpha}. \end{cases}$$

Existenz eines solchen α verwendet AC.

Es gilt für beliebige Mengen X, Y

$|X| \leq |Y|$ oder $|Y| \leq |X|$.

Vergleichbarkeit von Mengen:

$$ZFC^\circ \text{ impl. } |X| \leq |Y| \text{ oder } |Y| \leq |X| .$$

Äquivalent sind: (in ZFC°)

$$|X| \leq |Y| \iff X \preccurlyeq Y .$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[d, bend left] & & Y \arrow[d, leftrightarrow] \\ \aleph_\alpha \arrow[rr, "id"] & \subseteq & \aleph_\beta \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

$$|X| = |Y| \iff X \sim Y$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[d, bend left] & & Y \arrow[d, leftrightarrow] \\ \aleph_\alpha & = & \aleph_\alpha \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

Als Korollar erhalten wir: Falls $X \preccurlyeq Y$ und $Y \preccurlyeq X$, so $X \sim Y$.

[Satz von Cantor-Schröder-Bernstein]

Bemerkung: CSB kann ohne AC in ZF° bewiesen werden.

Ebbinghaus IX.1.4 (iii); Beweis auf S. 125.

Ein Axiom fehlt noch:

FUNDIERUNGSAXIOM (REGULARITÄT)

$ZF := ZF^0 + \text{Fundierung}$

$Z := Z^0 + \text{Fundierung}$

$ZFC := ZFC^0 + \text{Fundierung}$

z.B. Fundierung $\Longrightarrow$ $\forall x (x \notin x)$.

$\longrightarrow$ Übungsblatt 10

[Entsprechende Abschnitte in Ebbinghaus lesen.
$\underline{\text{III}}.6$ (S. 43–44)
$\underline{\text{VII}}.3$ (S. 107–110)]

Wir erinnern uns an <u>Cantors Theorem</u>.

<u>Theorem</u> Falls X eine beliebige Menge ist, so ex. keine Surjektion von X auf $\mathrm{Pot}(X)$.

<u>Beweis</u> Sei $f : X \longrightarrow \mathrm{Pot}(X)$ beliebige Funktion.

Definiere $D \subseteq X$

$$D := \{ x \in X ; \ x \notin f(x) \}$$

[Verwendung von Aus]

Beh. $D \notin \mathrm{Bild}(f)$. Ang. doch: sei d, so daß $f(d) = D$.

$$d \in D \Longleftrightarrow d \notin f(d) \Longleftrightarrow d \notin D \quad \lightning$$

q.e.d.

<u>Korollar</u> $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ ist nicht abzählbar.

[Ang. $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ ist abz. $\Longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathbb{N}) \sim \aleph_0 \sim \mathbb{N}$ im Wid zu Cantors Theorem.]

$\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar

$2^{\aleph_0}$

$\mathrm{Pot}(\mathbb{N}) \sim \aleph_\alpha$ mit $\alpha > 0$

<u>Frage</u> Welches α ist dies ?

Cantor hatte sich gefragt, welches α die Kard. von $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ gibt.

Hoffnung: $\alpha = 1$. [Das würde heißen, daß der Satz von Hartogs und der Satz von Cantor die gleichen Objekte produzieren.]

CH $\boxed{2^{\aleph_0} \stackrel{?}{=} \aleph_1}$ KONTINUUMSHYPOTHESE.

$\longrightarrow$ Hilberts Problem #1

Antwort: unklar. Es zeigt sich, daß CH weder aus ZFC folgt noch in ZFC widerlegt werden kann.

1938 / 1963
GÖDEL COHEN