Mathematische Logik & Mengenlehre

VORLESUNG XIX

__Ordinalzahlen__ : Es gibt "viele" (keine Menge aller Ord.)
Es gibt "lange" $(((\omega\cdot\omega)\cdot\omega)\cdot\omega \ \ldots)$

__Motivation__ Kanonische Repräsentanten für die Äquivalenzklassen der Relation $\sim$

$$X \sim Y \ :\Longleftrightarrow \text{ es ex. Bij. } f: X \longrightarrow Y$$

GLEICHMÄCHTIG

finden.

__Aber__ : Summe und Produkt erzeugen aus abzählbaren Ord. immer nur abzählbare.
Insbesondere ist $\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega$ zwar lang, aber nicht __lang genug__.

Def. Eine Menge X heißt **ABZÄHLBAR** falls eine Injektion $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ existiert!

Manche Autoren def. "X abzählbar" gdw eine Bij. $f : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ existiert.

$\downarrow$

Jede endliche Menge ist abzählbar.

WICHTIG: NICHT ÄQUIVALENT!

$\downarrow$

Jede abzählbare Menge ist unendlich!

	Typ 1 Autoren	Typ 2 Autoren
Inj. $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$	abzählbar	höchstens abzählbar
Bij. $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$	abzählbar unendlich	abzählbar

Lemma Eine nichtleere Menge ist abzählbar $[f: X \xrightarrow[\text{inj.}]{} \mathbb{N}]$ gdw eine Surjektion $g: \mathbb{N} \longrightarrow X$ existiert.

Beweis $\Longrightarrow$

$$g(n) := \begin{cases} f^{-1}(n) & \text{falls } n \in \text{Bild}(f) \\ x_0 & \text{falls } n \notin \text{Bild}(f) \end{cases}$$

wobei $x_0 \in X$ fest [← hier wird $X \neq \emptyset$ verwendet]

ist Surjektion

[**Bem.** $X, \mathbb{N}$ waren hier beliebig: Falls $f: X \longrightarrow Y$ inj., so ex. $g: Y \longrightarrow X$ surj.].

$\Longleftarrow$ Für jedes $x \in X$ ist $\underbrace{\{n \in \mathbb{N};\ g(n) = x\}}_{\subseteq \mathbb{N}} \neq \emptyset$.

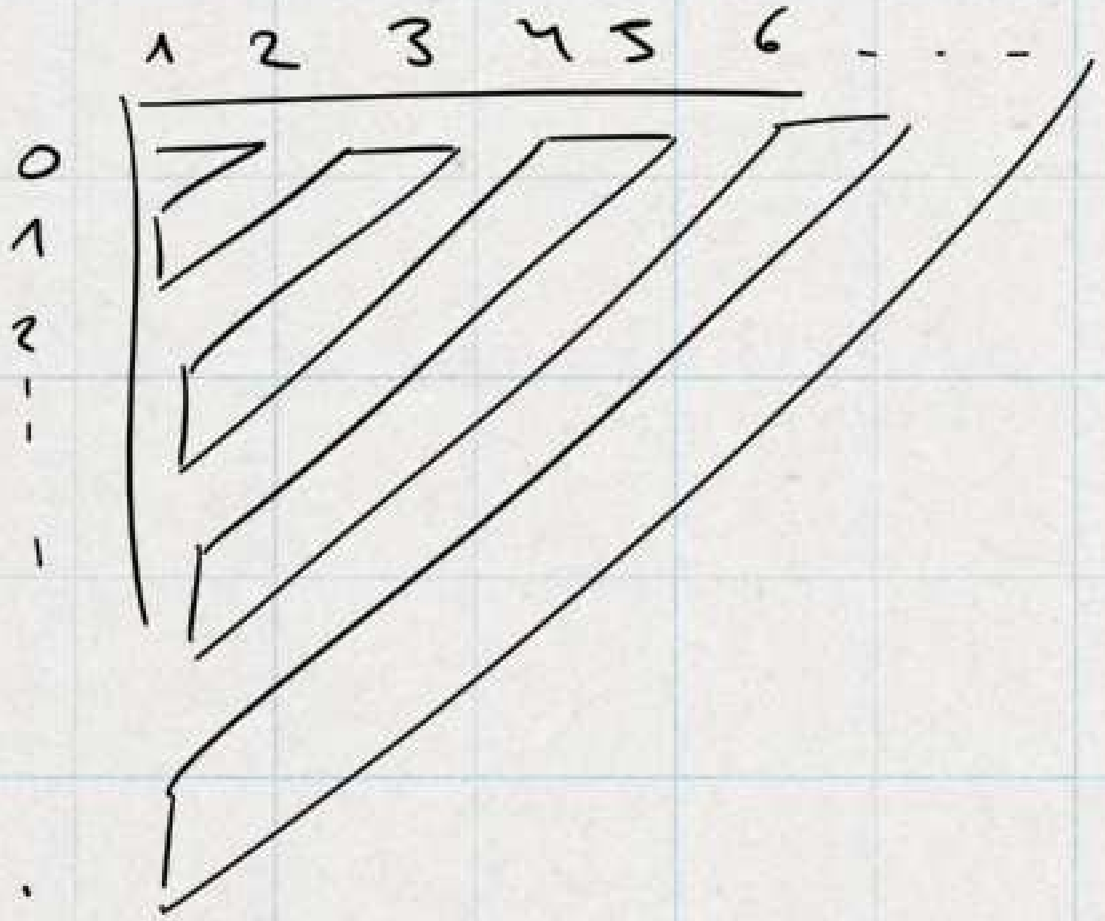
Sei also $f(x) := \min\{n \in \mathbb{N};\ g(n) = x\}$. Dies ist eine Injektion.

BEACHTE: Wir haben das Prinzip des kl. Elements in $\mathbb{N}$ verwendet!

Abzählbarkeit im ersten Studienjahr:

(1) Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

(2) Abzählbarkeit von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$



$$\left[(n,m) \longmapsto 2^n 3^m\right]$$

gibt Inj. von $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Die Operationen $\oplus$, $\otimes$ auf Wohlordnungen entsprechen den mengentheoretischen Operationen "disjunkte Vereinigung" und $\times$ (kartesisches Produkt).

Also: α, β abzählbar, dann $f: \alpha \longrightarrow \mathbb{N}$, $g: \beta \longrightarrow \mathbb{N}$ inj. Dann ist $\alpha\times\beta$ abzählbar durch

$$(\gamma,\delta) \longmapsto 2^{f(\gamma)}\cdot 3^{g(\delta)}.$$

Frage: $\exists$ es überabzählbare Ordinalzahlen?

Reduktion auf

Ist $\Omega = \{\alpha ; \alpha$ ist abzählbare Ordinalzahl$\}$ eine Menge?

Ang. es $\exists$ eine solche Menge Ω. Dann ist Ω eine Menge von Ordinalzahlen. Aber Ω ist transitiv:

$$x \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{abz. Ord.}}}{\alpha} \in \Omega \implies x \text{ Ord.}$$

$$x \subseteq \alpha \implies x \text{ ist abzählbar}$$

$$\implies x \in \Omega.$$

Wir hatten gesehen: transitive Mengen von Ord. sind Ord.

Also Ω ist Ord. z. $\implies \Omega \notin \Omega$

Also ist Ω nicht abzählbar nach Def. von Ω.

BEM. Ω ist die kleinste überabzählbare Ord. z.

Bleibt zu zeigen: Es gibt eine Menge aller abz. Ord.

Falls α abz. Ord., so ex. $f: \alpha \longrightarrow \mathbb{N}$ Injektiven

$A_f := \mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathbb{N}$

Für $n, m \in A_f$ $\quad n \, R_f \, m \;:\Longleftrightarrow\; f^{-1}(n) \in f^{-1}(m)$

$f: \alpha \longrightarrow A_f$ Inj. Surj.

$f: (\alpha, \in) \cong (A_f, R_f)$ Ordnungserhaltend zw. $(\alpha, \in), (A_f, R_f)$

Betrachte

$Z := \mathrm{Pot}(\mathbb{N}) \times \mathrm{Pot}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

$W := \{ (A, R) \in Z ; \; (A, R) \text{ ist Wohlordnung} \}$

Für jedes $(A, R) \in W$ existiert ein eindeutig bestimmtes α abzählbar mit $(\alpha, \in) \cong (A, R)$.

D.h. $\Phi(x,y) := x \in W \wedge y = \alpha$ mit $(\alpha, \in) \cong x$

ist eine funktionale Formel.

Sei Ω das Bild dieser funktionalen Formel von W:

dies existiert nach dem Ersetzungsaxiom.

Also ist Ω die Menge aller abzählbaren Ord.

und somit auch die kleinste überabz. Ord.z.

Friedrich Moritz Hartogs

Friedrich Hartogs

Born	20 May 1874 Brussels
Died	18 August 1943 (aged 69) Munich
Nationality	German
Known for	Hartogs's theorem, Hartogs's extension theorem, Hartogs number
	Scientific career
Fields	complex analysis, set theory, several complex variables
Doctoral advisor	Alfred Pringsheim
Influenced	Several complex variables

SATZ VON HARTOGS (ZF°)

Falls X eine beliebige Menge ist, so ex. eine Ord. α so daß keine Injektion von α nach X existiert.

Beweis [Eben: Spezialfall $X=\mathbb{N}$].

Schreibe $X \leq Y$ für "es ex. Inj. $X \longrightarrow Y$".

Betrachte

$$\Omega := \{\alpha;\ \alpha \leq X\}$$

Wie eben reicht es zu zeigen, daß Ω eine Menge ist.

[Da es trs. Menge von Ord. z., somit Ord., somit $\Omega \notin \Omega$]

Betrachte $W := \{(A,R) \in Pot(X) \times Pot(X \times X);\ (A,R)$ Wohlordnung$\}$

$\Phi(x,y) :\Longleftrightarrow x \in W$ und y ist Ord.z. isomorph zu x — funktional

Nach Ers. ex. das Bild von W unter funkt. Fml. Φ.

Beh. Dies ist Ω.

Zu zeigen: Falls $\alpha \leq X$, so ex. $(A,R) \in W$ mit $(\alpha, \in) \cong (A,R)$.

$f : \alpha \longrightarrow X$ Injektion

$A_f := \mathrm{Bild}(f)$

$x, y \in A_f \qquad x R_f y :\Longleftrightarrow f^{-1}(x) \in f^{-1}(y)$

$f : (\alpha, \in) \cong (A_f, R_f)$. q.e.d.

Dies gibt uns nicht nur überabzählbare Ord.z. sondern ganz viele wechselseitig nicht zueinander in Bijektion stehende unendliche Ord.z.

$$\mathbb{N} = \omega \xrightarrow[\text{HARTOGS}]{\Omega} \Omega = \{\alpha \,;\, \alpha \precsim \mathbb{N}\} \xrightarrow[\text{HARTOGS}]{} \Omega' := \{\alpha \,;\, \alpha \precsim \Omega\}$$

überabzählbar

$\Omega < \Omega'$

überabzählbar aber strikt größer [im Sinne von $\sim$] als Ω.

$$\Omega'' := \{\alpha \,;\, \alpha \precsim \Omega'\}$$

$$\Omega < \Omega' < \Omega''.$$

Die Aleph-Hierarchie

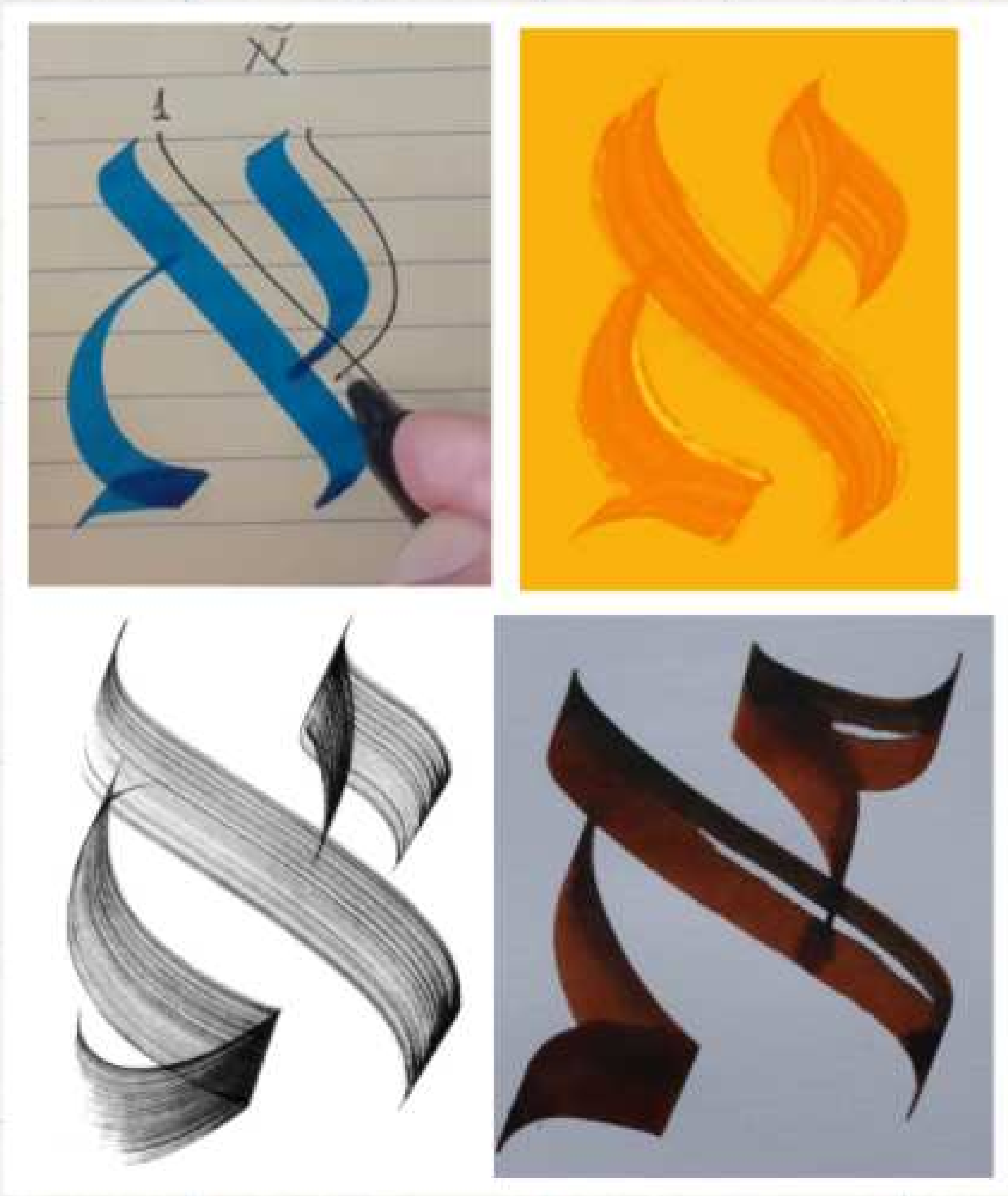
Der Satz von Hartogs gibt für jedes X eine Menge

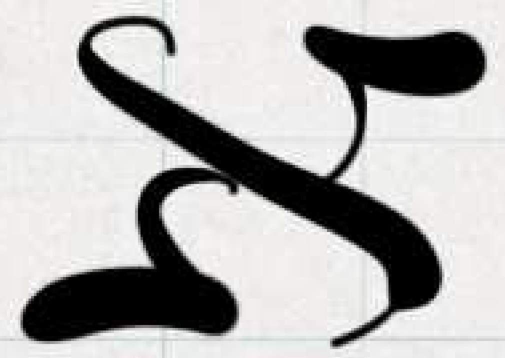
$$\aleph(X) := \Omega := \{\alpha \,;\, \alpha \not\leq X\}$$

"Aleph von X"

die kleinste Ord.z., die nicht in X injiziert werden kann

erste hebräische Buchstabe Aleph





$$\aleph_0 := \omega = \mathbb{N}.$$

$$\aleph_{\alpha+1} := \aleph(\aleph_\alpha)$$

λ Limeszahl

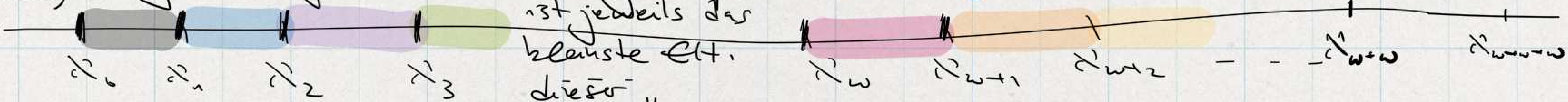
$$\aleph_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$$

REKURSIONSTHEOREM gibt uns für jedes γ eine bis γ definierte Fkt mit der Eigensch. daß die Fkt. für unterschiedliche γs auf ihrem gemeinsamen Def.-bereich übereinstimmen.

EIGENSCHAFTEN

1. $\alpha < \beta \implies \aleph_\alpha < \aleph_\beta$
   [Einfache Induktion.]
2. $\alpha \leq \aleph_\alpha$
   [Einfache Induktion.]
3. $\aleph_\alpha \leq \gamma < \aleph_{\alpha+1} \implies \aleph_\alpha \sim \gamma$
   [Klar $\gamma \leq \aleph_\alpha$; Rest ÜA.]

D.h. die Ordinalzahlen zerfallen in Stücke (Intervalle) von gleichmächtigen Ordz. Das Hartogs-Aleph ist jeweils das kleinste Elt. dieser Intervalle.



Für jede Ordinalzahl γ finden wir also ein α mit $\gamma \sim \aleph_\alpha$:

Nach ② + ① gilt $\gamma \leq \aleph_\gamma < \aleph_{\gamma+1}$. Also ex. δ mit $\gamma < \aleph_\delta$.

Sei nun δ minimal mit $\gamma < \aleph_\delta$.

<u>Fall 1</u> δ ist Limeszahl. $\aleph_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \aleph_\alpha \Rightarrow$ es ex. $\alpha \in \delta$ mit $\gamma \in \aleph_\alpha$.

$\gamma < \aleph_\alpha$.

Widerspruch zur Minimalität von δ.

<u>Fall 2</u> $\delta = \beta+1$. $\boxed{\aleph_\beta \leq \gamma < \aleph_{\beta+1}}$

Nach ③ gilt $\aleph_\beta \sim \gamma$.

Zusammenfassend

Falls α, β unendliche Ordinalzahlen sind, so ex. γ, δ mit

$$\aleph_\gamma \leq \alpha < \aleph_{\gamma+1}$$
$$\aleph_\delta \leq \beta < \aleph_{\delta+1}$$

und $\alpha \sim \beta \iff \gamma = \delta$.

Man nennt daher die Alephs auch ANFANGSZAHLEN, weil sie am Anfang der Intervalle stehen und könnte nun $\aleph_\alpha$ als kanonischen Repräsentanten für alle Elemente des Intervalls $\{\gamma ; \aleph_\alpha \leq \gamma < \aleph_{\alpha+1}\}$ wählen.

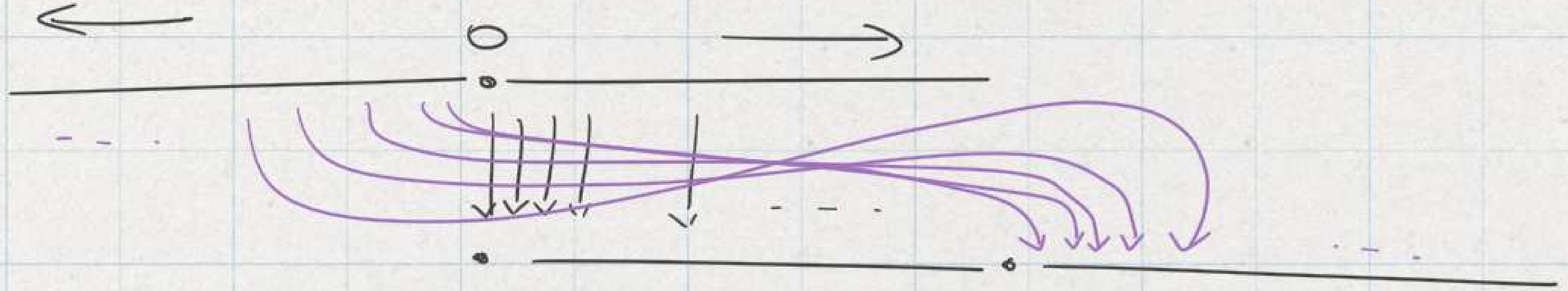
ACHTUNG: Dies funktioniert zunächst nur für Ordinalzahlen; nicht für beliebige Mengen.

Sei X eine beliebige Menge. Falls eine Relation $R \subseteq X \times X$ existiert mit (X, R) ist Wohlordnung, so finden wir α mit $(\alpha, \in) \cong (X, R)$ und können dann das eindeutige β mit $\aleph_\beta \sim \alpha$ als kanonischen Repräsentanten auswählen.

<u>Def.</u> Eine Menge heißt <u>wohlordenbar</u> falls ein $R \subseteq X \times X$ ex. so daß (X, R) Wohlordnung ist.

! WOHLORDENBAR $\neq$ WOHLGEORDNET

$(\mathbb{Z}, <)$ ist keine Wohlordnung, aber $\mathbb{Z}$ als Menge kann wohlgeordnet werden: $+n \longmapsto n$, $-(n+1) \longmapsto \omega + n$



[Insbesondere $X = \mathbb{Z}$].

Falls $X \sim \mathbb{N}$, so ist X wohlordenbar

$f: X \to \mathbb{N}$ Bij. $\qquad x \, R_f \, y \;:\iff\; f(x) \in f(y)$

$$f: (X, R_f) \cong (\mathbb{N}, \in).$$

Die Beobachtung war:

falls X wohlordenbar ist, so können wir einen kanonischen Repräsentanten $\gamma \sim X$ zuweisen.

FRAGE:

Ist jede Menge wohlordenbar?

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

Von

D. Hilbert.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unsrer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwickelung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

Es sei noch eine andere sehr merkwürdige Behauptung Cantors erwähnt, die mit dem genannten Satze in engstem Zusammenhange steht und die vielleicht den Schlüssel zum Beweise dieses Satzes liefert.

Cantor betrachtet nun eine besondere Art von geordneten Mengen, die er als wohlgeordnete Mengen bezeichnet und die dadurch charakterisirt sind, daß nicht nur in der Menge selbst, sondern auch in jeder Teilmenge eine früheste Zahl existirt. Das System der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... in dieser seiner natürlichen Ordnung ist offenbar eine wohlgeordnete Menge. Dagegen ist das System aller reellen Zahlen, d. h. das Continuum in seiner natürlichen Ordnung offenbar nicht wohlgeordnet.

Es erhebt sich nun die Frage, ob sich die Gesamtheit aller Zahlen nicht in anderer Weise so ordnen läßt, daß jede Teilmenge ein frühestes Element hat, d. h. ob das Continuum auch als wohlgeordnete Menge aufgefaßt werden kann, was Cantor bejahen zu müssen glaubt. Es erscheint mir höchst wünschenswert, *einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von Cantor zu gewinnen*, etwa durch wirkliche Angabe einer solchen Ordnung der Zahlen, bei welcher in jedem Teilsystem eine früheste Zahl aufgewiesen werden kann.

David **Hilbert**: *Mathematische Probleme*. In: Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse. Heft 3, 1900, S. 253–297,

23 Probleme für das 20. Jahrhdt.

Problem #1

KONTINUUMSPROBLEM

Eingeengt

Kann $\mathbb{R}$ wohlgeordnet werden?