Mathematische Logik & Mengenlehre

VORLESUNG XIV

$i \in \mathbb{N}$

1.6 Hilfssatz. (i) $x \in i \to x \in \omega \wedge x \subseteq i$.
(ii) $(x \in i \to x \subseteq i) \wedge (x \in \omega \to x \subseteq \omega)$.
(iii) $i \notin i$.
(iv) $\mathrm{Bild}(\mathbf{S}) \cup \{\mathbf{0}\} = \omega$.

$\omega = \mathbb{N}$

$\mathbf{0} = \emptyset$

$x \longmapsto x \cup \{x\}$.

Theorem $(\mathbb{N}, S, 0)$ eine Peano-Struktur

FST   Ex + Ext + $\cup$-Ax + $\bigcup$-Ax + Aus + Pot

$\longrightarrow$ ABSTRAKTE MATHEMATIK

Die Axiome, die wir bislang angegeben haben, bilden eine Version des Zermeloschen *Axiomensystems* $\mathbf{Z}^0$ der *Mengenlehre ohne Auswahlaxiom* und *ohne Fundierungsaxiom*, kurz:

$$\mathbf{Z}^0 = \underbrace{\mathbf{Ex} + \mathbf{Ext} + \mathbf{Aus} + \cup\text{-}\mathbf{Ax} + \bigcup\text{-}\mathbf{Ax} + \mathbf{Pot}}_{\text{FST}} + \mathbf{Inf}.$$

Berühmte axiomatische Grundlage der Mengenlehre ZERMELO 1908

$0 \quad S(0) \quad S(S(0)) \quad S(S(S(0))) \quad \ldots$

$S(0) = 1, \quad S(S(0)) = 2, \quad S(S(S(0))) = 3$

größer

$\longrightarrow$ konkrete Objekte: $\mathbb{N}$

$\xrightarrow{\qquad\qquad}$ größer

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$

$1 = \{0\} \quad 2 = \{0,1\} \quad 3 = \{0,1,2\}$

$2 = \{0,\{0\}\} \quad 3 = \{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\}$

I.a. besteht ein $n \in \mathbb{N}$ aus allen kleineren natürlichen Zahlen.

Definiere $<$ auf $\mathbb{N}$:

$$n < m \;:\Longleftrightarrow\; n \in m.$$

<u>Satz</u> $(\mathbb{N},<)$ ist eine strikte totale Ordnung ("Ordnung i.S.v. $<$")

D.h. $<$ ist irreflexiv, transitiv & konnex.

Beweis **Irreflexiv**: $\forall n \quad n \not< n$

$\iff n \notin n.$ [Das war im Lemma am Montag bewiesen worden.]

Transitiv $\forall n \forall m \forall k$

$n < m$ und $m < k$, so $n < k$.

$\iff n \in m$ und $m \in k$, so $n \in k$.

$\Downarrow$

$m \subseteq k$

$\Longrightarrow n \in k.$ ✓

Verbleibt: Konnex.

$\forall n, m \quad n < m$ oder $n = m$ oder $m < n$

$\iff n \in m$ oder $n = m$ oder $m \in n$.

[Per Induktion nach n: $\boxed{\forall m \ n \in m \text{ oder } n = m \text{ oder } m \in n}$

$\Phi(n)$.

$\Phi(n)$ $\forall m$ $n \in m$ oder $n = m$ oder $m \in n$.

<u>IA</u> $n = 0$. $\forall m$ $0 \in m$ oder $0 = m$ oder $m \in 0$

$\Longleftrightarrow \forall m$ $\underline{\emptyset \in m \text{ oder } \emptyset = m}$ ~~oder $m \in \emptyset$~~.

Zeigen wir dies per Induktion. [nach m]

IA $m = 0$ $\Longrightarrow \emptyset = m$. ✓

IS Ang. $\boxed{\emptyset \in m}$ oder $\boxed{\emptyset = m}$.

Dann gilt $S(m) = m \cup \{m\}$

$\longrightarrow \emptyset \in m \subseteq S(m)$ ✓

$\longrightarrow \emptyset = m \in \{m\} \subseteq S(m)$ ✓.

Verbleibt IS: Ang. $\forall m$ $n \in m$ oder $n = m$ oder $m \in n$.

Z.z. $\forall m$ $S(n) \in m$ oder $S(n) = m$ oder $m \in S(n)$.

Lemma Falls $n \in m$ $[n < m]$, so gilt entweder $S(n) = m$ oder $S(n) \in m$.

[Dies bedeutet: der Nachfolger von n ist die kleinste Zahl größer als n.]

Beweis Induktion nach m.

IA: $m = \emptyset$. Dann ist $n \in \emptyset$ nicht wahr und somit die Implikation wahr!

IS: $n \in m \Longrightarrow S(n) = m$ oder $S(n) \in m$.

z.z. $S(n) = S(m)$ oder $S(n) \in S(m)$.

Annahme $n \in S(m) = m \cup \{m\}$

Fall 1 $n \in m \Longrightarrow S(n) = m \in S(m)$ oder $S(n) \in m \subseteq S(m)$ ✓

Fall 2 $n = m \Longrightarrow S(n) = S(m)$

q.e.d.

Zurück zum Beweis des Satzes. Induktionsannahme:

$\forall m \quad \underbrace{n \in m}_{A}$ oder $\underbrace{n = m}_{B}$ oder $\underbrace{m \in n}_{C}$.

z.z. $\quad \forall m \quad S(n) \in m$ oder $S(n) = m$ oder $m \in S(n)$

Fall B $\quad n = m \quad m \in \{m\} = \{n\} \subseteq S(n)$

Fall C $\quad m \in n \subseteq S(n)$

Fall A $\quad n \in m \quad \xRightarrow{\text{Lemma}} \quad$ Fall A1 $\quad S(n) = m$

Fall A2 $\quad S(n) \in m$.

Wir haben nun $(\mathbb{N}, <)$ strikte totale Ordnung. $\qquad$ q.e.d.

Man definiere $n \leq m \;:\Longleftrightarrow\; n < m$ oder $n = m$.

Satz $n \leq m \Longleftrightarrow n \subseteq m$.

Beweis

$\Longrightarrow$

$n \leq m \Longrightarrow n < m$ oder $n = m$.

$n < m \Longrightarrow n \in m \xRightarrow{\text{Lemma vom Montag}} n \subseteq m$ ✓

$n = m \Longrightarrow n \subseteq m$ ✓

$\Longleftarrow$

$n \subseteq m$. Nach Konnexität gilt: $\overbrace{n \in m \text{ oder } n = m}^{n \leq m}$ ~~oder $m \in n$~~.

Ich zeige: $m \notin n$: $m \in n \subseteq m \Longrightarrow m \in m$ [Widerspruch zum Lemma vom Montag]

q.e.d.

Nächstes Ziel: Arithmetische Operationen auf $\mathbb{N}$.

Hintergrund sind die rekursiven Definitionen von $+$ aus $\mathbb{S}$ und von $\cdot$ (Mal) aus $+$:

GRASSMANN REKURSIONS-GLEICHUNGEN

$$\boxed{\begin{aligned} x+0 &:= x \\ x+(y+1) &:= (x+y)+1 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x\cdot 0 &:= 0 \\ x\cdot(y+1) &:= x\cdot y + x \end{aligned}}$$

Hierfür braucht man ein Rekursionsprinzip.

Explizite Funktionsdefinition auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,;\,\Phi(n,m)\}$$

Verwendet Aus

$$\mathbb{S} := \{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,;\,\Phi_{\mathbb{S}}(n,m)\} \qquad \text{z.B. } \Phi_{\mathbb{S}}(n,m) \Longleftrightarrow m = n\cup\{n\}$$

REKURSION

"ω-REKURSIONSTHEOREM"

Unser Theorem ist etwas schwächer als Theorem V.2.2 in Ebbinghaus.

Sei $F : \overset{\omega}{\underline{\mathbb{N}}} \longrightarrow \mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$.

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Fkt. $G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, welche

$$(*) \left[\begin{array}{l} G(0) := n_0 \\ G(S(n)) := F(G(n)) \end{array} \right.$$

REKURSIONSGLEICHUNGEN

erfüllt.

Beweis

Eindeutigkeit: Ang. G, G' seien Funktionen, die $(*)$ erfüllen.

z.z. $\forall n \quad G(n) = G'(n)$.

Induktion IA: $n = 0$. $G(0) = n_0 = G'(0)$. ✓

IS Ang. $G(n) = G'(n)$. Dann $G(S(n)) = F(G(n))$

$= F(G'(n))$

$= G'(S(n))$. ✓

$G(0) = n_0$

$G(S(n)) = F(G(n))$ (*)

Existenz

$\{ (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} ;\ \Phi(n,m) \}$

$\uparrow$

Finde geeignetes Φ.

Def. Eine Funktion g heißt **KEIM** falls $\mathrm{Def}(g) \in \mathbb{N}$ und für alle $m \in \mathrm{Def}(g)$ gilt (*)

$\left[\begin{array}{l} = \{0,1,2,\ldots,k\} \\ = \emptyset \end{array} \right]$

[D.h. Keime sind endliche Approximationen der gewünschten Funktion.]

$\emptyset$ ist ein Keim $[\mathrm{Def}(\emptyset) = \emptyset \in \mathbb{N}]$

$g_0 = \{(0, n_0)\}$ ist ein Keim $[\mathrm{Def}(g_0) = \{0\} = 1 \in \mathbb{N}]$

Beh. 1 Falls g, g' Keime sind und $n \in \mathrm{Def}(g) \cap \mathrm{Def}(g')$, so ist $g(n) = g'(n)$. [Beweis ist identisch zur Eindeutigkeit von G.]

<u>Beh. 2</u> Für alle n ex. ein Keim $\underset{\triangleleft}{g}$ mit $n \in Def(\underset{\triangleleft}{g})$.

[Induktion nach n.

IA. $n = \mathbb{0}$ wird durch den Keim $\{(\mathbb{0}, x_0)\}$ bewiesen.

IS. Ang. $\underset{\triangleleft}{g}$ sei ein Keim mit $n \in Def(\underset{\triangleleft}{g})$.

$$\underset{\triangleleft}{g}' := \underset{\triangleleft}{g} \cup \{(\mathbb{S}(n), F(\underset{\triangleleft}{g}(n)))\}$$

ist ein Keim mit $\mathbb{S}(n) \in Def(\underset{\triangleleft}{g}')$.]

$$\Phi(n,m) :\Longleftrightarrow \exists \underset{\triangleleft}{g} (\underset{\triangleleft}{g} \text{ Keim} \wedge n \in Def(\underset{\triangleleft}{g}) \wedge m = \underset{\triangleleft}{g}(n)).$$

[ÜA: Versuchen Sie, diese Abkürzung in $\mathcal{L}_\epsilon$ auszuschreiben.]

$$G := \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,;\, \Phi(n,m)\}$$

$G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

Funktionalität folgt aus Beh. 1

Totalität folgt aus Beh 2

q.e.d.

Grassmann

Sei n fest. Setze $\mathrm{add}_n(0) := n$

$\mathrm{add}_n(S(m) := S(\mathrm{add}_n(m))$

$\Longrightarrow \mathrm{add}_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ [nach ω-Rekursionstheorem]

Definiere $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$x \cdot (y+1) = x \cdot y + x$

$+ := \{ ((n,m),k) \, ; \, \mathrm{add}_n(m) = k \}$

Sei n fest. Setze $\mathrm{mult}_n(0) := 0$

$\mathrm{mult}_n(S(m)) := \mathrm{add}_{\mathrm{mult}_n(m)}(n)$

$\Longrightarrow \mathrm{mult}_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Vernünftig geschrieben:

$$\boxed{\begin{aligned} n+0 &:= n \\ n+S(m) &:= S(n+m) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} n\cdot 0 &:= 0 \\ n\cdot S(m) &= n\cdot m + n \end{aligned}}$$

ASYMMETRIE: Rekursion findet im rechten Glied statt.

Vielleicht überraschend, da wir erwarten, daß $n+m=m+n$, $n\cdot m = m\cdot n$.

<u>Lemma</u> $\forall n \; n\cdot 0 = 0$ (1) und $0\cdot n = 0$. (2)

[(1) direkt aus Def.

(2) $0\cdot 0 = 0$. ✓

$0\cdot S(n) = \underline{0\cdot n} + 0$
$= 0 + 0 = 0$.]

<u>Lemma</u> $\forall n \; n+0 = n$ (1) und $0+n = n$. (2)

[<u>Beweis</u> (1) direkt aus Def.

(2) Per Induktion $\forall n \; 0+n = n$.

IA: $0+0=0$ ✓

IS: $0+n=n \Longrightarrow \underline{0+S(n)} = S(0+n)$
$= \underline{S(n)}$]

Grundrechenregeln von + und ·

$$(n+m)+k = n+(m+k)$$
$$(n\cdot m)\cdot k = n\cdot(m\cdot k)$$
$$n+m = m+n$$
$$n\cdot m = m\cdot n$$

Übungsblatt 7.

Wir werden einen Begriff der Gleichmächtigkeit definieren:

$$X \sim Y \;:\Longleftrightarrow\; \text{es ex. Bij. } f: X \longrightarrow Y$$

Theorem Falls $n, m \in \mathbb{N}$, so gilt: $n \sim m \Longleftrightarrow n = m$.