Mathematische Logik & Mengenlehre

VORLESUNG X

Ext $\quad \forall x \forall y (\forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longleftrightarrow x \equiv y)$

LM $\quad \exists x \forall z (z \notin x)$

EINERMENGENAXIOM

Informell: Für jede Menge x existiert eine Einermenge, die exakt x als Element hat.

$$\forall x \exists s \forall z (z \in s \longleftrightarrow z \equiv x)$$

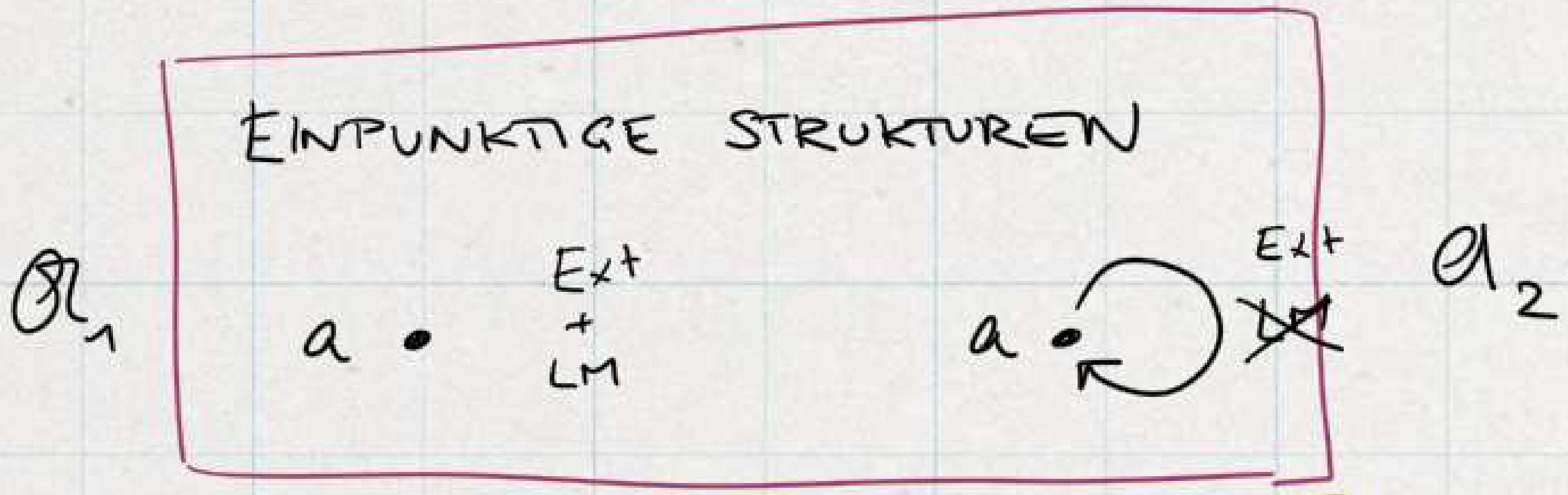
Überprüfen wir nun, ob dieses Axiom in den 5 Strukturen gilt:

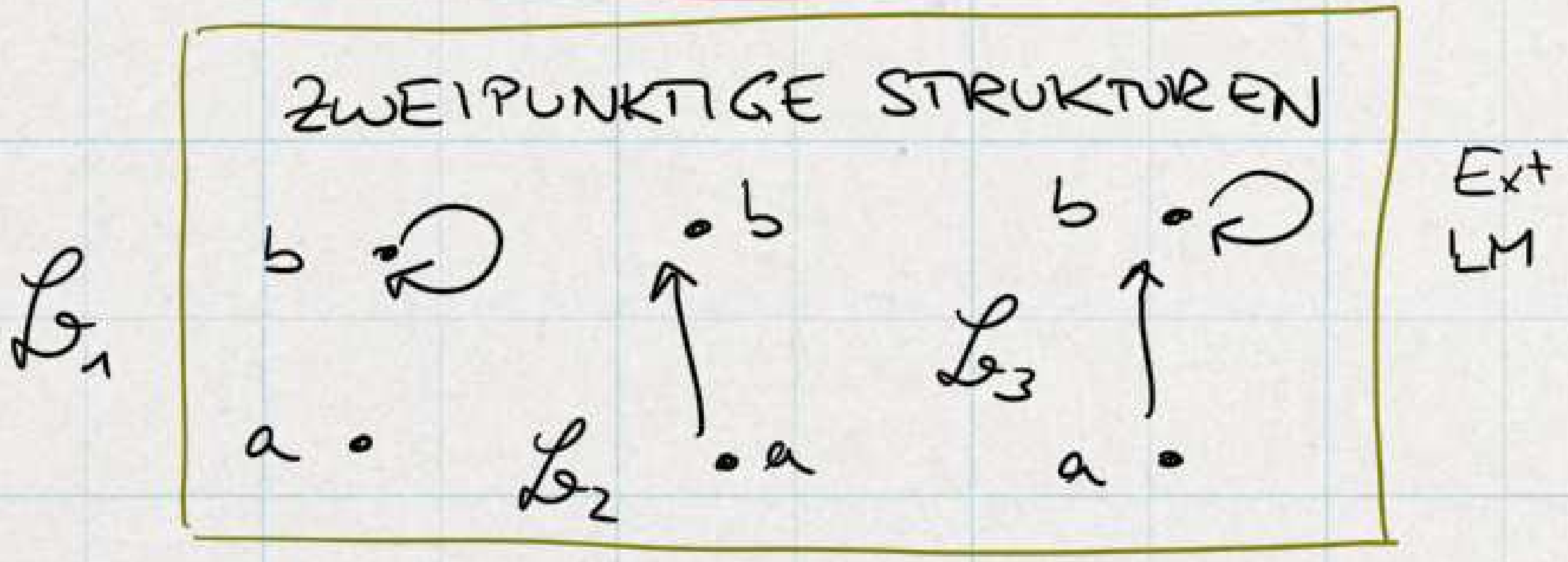
Extensionalitätsaxiom (Ext):

Umfangsgleiche Mengen sind gleich. INFORMELL

Also: S-Ausdruck

$$\forall xy\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$





INTUITION $\longleftrightarrow$ FORMALISMUS

$\mathfrak{A}_1 \nvDash$ Einer $\quad \mathfrak{A}_2 \vDash$ Einer, da $a = \{a\}$.

$\mathfrak{B}_1 \nvDash$ Einer $\quad \mathfrak{B}_2 \nvDash$ Einer $\quad \mathfrak{B}_3 \nvDash$ Einer

[$b = \{b\}$ a hat keine Einermenge] [$b = \{a\}$] [weder a noch b haben Einermengen.]

Theorem Falls $\mathfrak{A} \models \mathrm{Ext} + \mathrm{LM} + \mathrm{Einer}$, so ist $\mathfrak{A}$ unendlich.

Beweis Wir beweisen die Aussage, indem wir eine Injektion $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ angeben. Diese definieren wir per Rekursion.

Da $\mathfrak{A} \models \mathrm{Ext} + \mathrm{LM} + \mathrm{Einer}$, existieren

(a) eine eindeutige Leere Menge [d.h. a mit $\mathfrak{A}\frac{a}{x} \models \forall z\,(z \notin x)$]

(b) für jedes $a \in A$ ein $b \in A$ mit
b ist das eindeutig bestimmte Element, welches exakt a als Elemente [d.h. b mit $\mathfrak{A}\frac{a}{x}\frac{b}{y} \models \forall z\,(z \in y \longleftrightarrow z \equiv x)$]

REKURSION: $f(0) :=$ das eindeutig bestimmte leere Element von A

$f(n+1) :=$ das eindeutig bestimmte b, welches exakt $f(n)$ als Elt. enthält.

Offensichtlich: falls $n > 0$, so $f(n) \neq f(0)$.

Ich behaupte, daß f eine Injektion ist. Beweis per Induktion:

IV für n gilt: $\forall k < n \quad f(k) \neq f(n)$.

[Klar (IA). Falls $n = 0$, so ist IV erfüllt.]

Nehme IV an und betrachte $f(n+1)$. Um einen Widerspruch herzuleiten, nehmen wir an, daß $f(n+1) = f(k)$ für ein $k < n+1$.

$f(n+1) \neq f(0) \implies k \neq 0$, also z.B. $k = l+1$.

$l < n$

$f(n+1) = f(l+1)$

$\underbrace{\text{das einzige Elt. ist } f(n) \qquad \text{das einzige Elt. ist } f(l)}$

$\implies f(n) = f(l)$. Das ist ein Widerspruch zur IV.

q.e.d.

Bemerkung -

1. Bereits Modelle von Ext+LM+Gner können nicht mehr explizit gezeichnet werden.

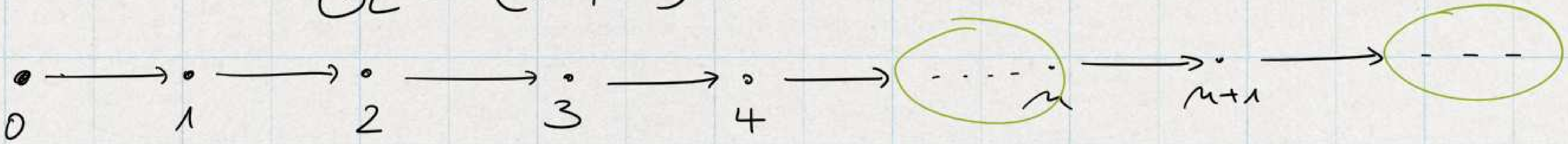
2. Falls $\mathfrak{A} \models$ Ext+LM endlich, so wissen wir ohne dies explizit nachzuprüfen, daß $\mathfrak{A} \not\models$ Gner.

3. Wir können Modelle von Ext+LM+Gner trotzdem beschreiben:

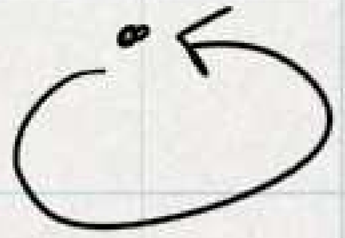
$A = \mathbb{N}$

$E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad nEm \iff m = n+1$.

$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, E) \models$ Ext+LM+Gner



4. Man beachte, daß LM notwendig ist in unserem Theorem:

$\mathfrak{A}$: 

$\mathfrak{A} \models$ Ext+Gner.

Unser nächstes Axiom ist das

Paarmengenaxiom (Ebbinghaus S. 34)

Informell: Zu je zwei Mengen x und y gibt es eine Menge, die x und y als Elte enthält.

exakt

$\forall x \exists s \forall z (z \in s \longleftrightarrow z \equiv x)$

S-Ausdruck: $\forall x \forall y \exists p \; \forall z (z \in p \longleftrightarrow (z \equiv x \vee z \equiv y))$

$\{\{a\},\{a,b\}\}$

$\forall \ldots \; \exists \ldots$ Beschreibung

$\Phi(x,y,z,p)$

Bemerkungen

$\{a,b\}$ $a=b$

$\{a,a\}=\{b,b\}=$

$\{a\}=\{b\}$

1. Paar $\Longrightarrow$ Einer.

Für beliebige Wahlen $a,b \in A$ gilt $\mathfrak{A}\frac{a\,b}{x\,y} \models \exists p(\forall z(\ldots))$

Auch $a=b$ und dieser Fall ist gerade das Einermengenaxiom.

2. (24) – (26) Aufgaben auf Übungsblatt 5

$\longrightarrow$ Konstruktion eines Modells von Paar.

3. $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, E)$ mit $n E m \Leftrightarrow m = n+1$ ist <u>kein</u> Modell von Paar: Es gibt kein k mit $0 E k$ und $1 E k$.

4. Unser pathologisches Modell

ist ein Modell des Paarmengenaxioms.

[Da es nur auf $x = a$ und $y = a$ angewandt werden muß.]

Wir erinnern uns an das Fregesche Komprehensions~~axiom~~axiomenschema:

INFORMELL Für jede Eigenschaft P gibt es die Menge aller Mengen mit Eigenschaft P.

FORMEL

Dies erlaubt uns, die Notation $\{x ; \varphi(x)\}$ zu verwenden.

Sei φ ein S-Ausdruck.

[$n+1$ freie Variable]

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \exists c \, \forall z \, (z \in c \longleftrightarrow \varphi(z, x_1, \ldots, x_n))$$

$K\varphi$ sei diese Formel. $\{K\varphi ; \varphi \text{ ist ein } S\text{-Ausdruck}\}$

Eine Menge von Axiomen heißt Axiomenschema.
Die einzelne Axiome dann nennt man dann INSTANZEN
des Schemas.

(Russell) $\exists x \, \forall z \, (z \in x \longleftrightarrow z \notin z)$

INSTANZ $\varphi(z) := z \notin z$ $[n = 0]$

KOMPREHENSION $\Longrightarrow$ (Russell).

Wir hatten gesehen: $\mathfrak{A} \nvDash$ (Russell).

Daher ist Komprehension kein sinnvolles Axiomenschema.

Penelope Maddy

Axiomatisierungsmaximen

ONE STEP BACK FROM DISASTER

Die Lösung für das Problem des Komprehensionsschemas war das

AUSSONDERUNGSSCHEMA

Schema der Aussonderungsaxiome (Aus): Das Schema enthält zu jedem Ausdruck der Gestalt $\varphi(z, \overset{n}{x})$[3] aus der ursprünglichen mengentheoretischen Sprache das Axiom

Zu allen $x_1, \ldots, x_n$ und allen x gibt es ein y, das genau diejenigen Elemente z von x enthält, für die $\varphi(z, \overset{n}{x})$ gilt.

Also:

$$\underbrace{\forall \overset{n}{x}}_{\forall x_1 \ldots \forall x_n} \forall x \exists y \forall z \, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, \underbrace{\overset{n}{x}}_{x_1, \ldots, x_n})).$$

$\overset{n}{x}$

KOMPREHENSION:

$\{z \,;\, \varphi(z)\}$

AUSSONDERUNG

$\{z \in x \,;\, \varphi(z)\}$

z.B.

$\{\vec{x} \,;\, A\vec{x} = \vec{b}\}$

meint

$\{\vec{x} \in K^n \,;\, A\vec{x} = \vec{b}\}$

φ mit $n+1$ freien Variablen

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists \underbrace{c}_{y} \, \forall z \, (z \in c \longleftrightarrow \varphi(z, x_1 \ldots x_n))$$

Was geschieht mit Russells Paradox?

$$\varphi(z) := z \notin z$$

$$\boxed{\forall x \exists y \forall z \left(z \in y \longleftrightarrow z \in x \wedge \underline{z \notin z} \right)}$$

Falls $y \in y \longleftrightarrow y \in x \wedge \underline{y \notin y}$.

Also gilt: $y \notin x$.

__Bemerkung__

1. Russells Argument gibt keinen Widerspruch mehr.
2. Für beliebige x haben wir ein y gefunden mit $y \notin x$.

Schema der Aussonderungsaxiome (Aus): Das Schema enthält zu jedem Ausdruck der Gestalt $\varphi(z, \overset{n}{x})$[3] aus der ursprünglichen mengentheoretischen Sprache das Axiom

Zu allen $x_1, \ldots, x_n$ und allen x gibt es ein y, das genau diejenigen Elemente z von x enthält, für die $\varphi(z, \overset{n}{x})$ gilt.

Also:

$$\forall \overset{n}{x}\, \forall x \exists y \forall z \left(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, \overset{n}{x}) \right).$$

Theorem Sei $\mathfrak{A} \models$ Aus

Dann gibt es kein universelles Objekt.

[Achtung: Aus ist keine Formel, sondern eine Menge $\{\mathrm{Aus}_\varphi ; \varphi \in L^S\}$ von Sätzen. Also heißt $\mathfrak{A} \models$ Aus: f.a. φ $\mathfrak{A} \models \mathrm{Aus}_\varphi$.]

Definition Falls $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine S-Struktur ist, so heißt $a \in A$ <u>universell</u> falls für alle $b \in A$ gilt $b E a$.

[Mengentheoretisch interpretiert: eine MENGE ALLER MENGEN.]

Beweis Betrachte Russells Instanz von Aus:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow z \in x \wedge z \notin z).$$

Sei a gegeben. Angenommen, a sei universell, also f.a. $b \in A$, $b E a$.

Nach Russell ex. r mit $\forall c (c \in r \longleftrightarrow c \in a \wedge c \notin c)$

Wie oben gilt also $r \notin a$. Somit ist a nicht universell. qed

Wir stellen fest, daß es [unter Annahme von Aus] keine Menge aller Mengen geben kann.

LM $\exists x \forall z (z \notin x)$

$\underline{\exists x \forall z (z \in x \longleftrightarrow z \neq z)}$

Weitere Konsequenzen von Aussonderung:

1. Betrachte $\varphi(z) := z \neq z$

   Falls $a \in A$ beliebig und ich sondere aus a mit Aus_φ aus, so erhalte ich die leere Menge.

   [Da S-Strukturen per definitionem immer nichtleer sind, gilt also in jeder S-Struktur $\mathfrak{A}$

   $$\mathfrak{A} \models \mathrm{Aus} \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \mathrm{LM}.$$

   Wir brauchen LM also nicht als separates Axiom.

2. D.h. jedes Modell von Aus, ~~Gkw~~, Ext ist unendlich.
3. Insbesondere ist kein Modell von Aus.

4. Falls $\underbrace{x, y}$ Mengen sind

$$\varphi(z, y) := z \in y$$

Aus_φ $\quad \underbrace{\forall y} \forall x \exists s \forall z \left(z \in s \longleftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, y) \right)$

KOMPLIZIERTER:

~~Vereinigung~~

$$\underbrace{\forall y} \forall x \exists s \forall z \left(z \in s \longleftrightarrow \boxed{z \in x \wedge z \in y} \right)$$

DER SCHNITT VON x $\underbrace{\text{und}}$ y.

$x \cap y$

5. Falls $\underbrace{x, y}$ Mengen sind

$$\psi(z, y) := z \notin y$$

Aus_ψ $\quad \underbrace{\forall y} \forall x \exists s \forall z \left(z \in s \longleftrightarrow z \in x \wedge \psi(z, y) \right)$

$$\underbrace{\forall y} \forall x \exists s \forall z \left(z \in s \longleftrightarrow z \in x \wedge z \notin y \right)$$

DIFFERENZ VON x $\underbrace{\text{und}}$ y

$x \setminus y$

Schema der Aussonderungsaxiome (Aus): Das Schema enthält zu jedem Ausdruck der Gestalt $\varphi(z, \overset{n}{x})^3$ aus der ursprünglichen mengentheoretischen Sprache das Axiom

Zu allen $x_1, \ldots, x_n$ und allen x gibt es ein y, das genau diejenigen Elemente z von x enthält, für die $\varphi(z, \overset{n}{x})$ gilt.

Also:

$$\forall \overset{n}{x} \, \forall x \exists y \forall z \left(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, \overset{n}{x}) \right).$$