Mathematische Logik & Mengenlehre

[11. Mai 2020]

Siebte ~~Achte~~ Vorlesung

Letztes Mal:

ISOMORPHIELEMMA

Falls $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, φ Satz

$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$.

3.5.4 Definition Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ S-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *Substruktur* von $\mathfrak{B}$ (kurz: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), wenn

(a) $A \subseteq B$;

(b) (1) für n-stelliges $R \in S$ ist $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$
(d.h., für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt: $R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_n$ gdw $R^{\mathfrak{B}} a_1 \ldots a_n$);

(2) für n-stelliges $f \in S$ ist $f^{\mathfrak{A}}$ die Restriktion von $f^{\mathfrak{B}}$ auf A^n;

(3) für $c \in S$ ist $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Bsp. 1 $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{N}, +)$

Dann ist $(\mathbb{N}, +)$ Substruktur von $(\mathbb{Z}, +)$.

Bsp. 2 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Dann ist $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ Substruktur von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \models \overbrace{\exists x\, (x \cdot x = 1+1)}^{\varphi_{\sqrt{2}}}$$

aber $(\mathbb{Q}, +, \cdot) \not\models \varphi_{\sqrt{2}}$.

3.5.4 Definition Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ S-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *Substruktur* von $\mathfrak{B}$ (kurz: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), wenn

(a) $A \subseteq B$;

(b) (1) für n-stelliges $R \in S$ ist $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$
(d.h., für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt: $R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_n$ gdw $R^{\mathfrak{B}} a_1 \ldots a_n$);

(2) für n-stelliges $f \in S$ ist $f^{\mathfrak{A}}$ die Restriktion von $f^{\mathfrak{B}}$ auf A^n;

(3) für $c \in S$ ist $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

$(A, \alpha) = \mathfrak{A}$

$(B, b) = \mathfrak{B}$

$\boxed{A \subseteq B}$

$\boxed{\text{Da } A \subseteq B \text{ ist } (a_1, \ldots, a_n) \in A^n \subseteq B^n.}$

$(a_1, \ldots, a_n) \in \alpha(R) \iff \underline{(a_1, \ldots, a_n) \in b(R)}$

$\alpha(f)(a_1, \ldots, a_n) = \underline{b(f)}(a_1, \ldots, a_n)$

$\alpha(f) : A^n \longrightarrow A$ $\qquad b(f) : B^n \longrightarrow B$

[Insbesondere: $b(f)(a_1, \ldots, a_n) \in A$.]

Gruppen: $\varphi_A^* \wedge \varphi_{NI}^*$

$$(\mathbb{Z}, +) \models \varphi_A^* \wedge \varphi_{NI}^*$$

Betrachte $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Es gilt: $n, m \in \mathbb{N} \Longrightarrow n+m \in \mathbb{N}$.

D.h. $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Substruktur von $(\mathbb{Z}, +)$

$(\mathbb{N},+)$ ist abgeschlossen unter der Operation $+$, aber nicht unter der Operation $-$.

Aber: $(\mathbb{N}, +)$ IST KEINE GRUPPE !!!

$$(\mathbb{N}, +) \models \boxed{\varphi_A^*} \wedge \boxed{\neg \varphi_{NI}^*}$$

Gegenbsp. $1 \in \mathbb{N}$, aber $-1 \notin \mathbb{N}$.

Ist es Zufall, daß φ_A^* weiterhin gilt?

Sprache erweitern zu $\{*, e, i\} =: S^*$

$$\varphi_A^* \wedge \forall x \big(x*e \equiv x \wedge e*x \equiv x \wedge i(x)*x \equiv e \wedge x*i(x) \equiv e \big)$$

Jetzt gilt: $(\mathbb{N}, +, 0, -)$ keine Unterstruktur von $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$ ist.

Nicht einmal wohldefiniert.

In der Sprache S^* sind die Substrukturen von $\mathbb{Z}$ allesamt Gruppen.

$$(\mathbb{Z}, +) \models \varphi_A^*$$

$$\models \forall x \forall y \forall z \;\; x * (y * z) \equiv (x * y) * z$$

$\Longleftrightarrow$ für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$ gilt $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$$(\mathbb{N}, +) \models \varphi_A^*$$

$\Longleftrightarrow$ für alle $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ gilt $n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$

3.5.6 Definition Die Ausdrücke, die im folgenden Kalkül ableitbar sind, nennt man *universelle* Ausdrücke oder *Allausdrücke*:

(i) $\dfrac{}{\varphi}$, falls φ $\boxed{\text{quantorenfrei}}$; (ii) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi * \psi)}$ für $* = \wedge, \vee$;

(iii) $\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}$.

φ quantorenfrei

falls $\exists$ $\forall$ nicht in φ auftauchen.

Wichtig: wenn wir unter $\neg$ abschließen, können wir $\neg \forall x \neg \varphi \dashv\vdash \exists x \varphi$ bilden.

Kalkülschreibweise

Eine Formel φ heißt universell, falls es eine Formelableitung $\xi_1 \ldots \xi_n$ gibt mit $\xi_n = \varphi$ und $\forall i \leq n$ gilt:

(i) ξ_i ist $\boxed{\text{quantorenfrei}}$ oder

(ii) es gibt $j, k < i$ mit $\xi_j = \psi$ und $\xi_k = \chi$ und $\xi_i = (\psi \vee \chi)$ oder $\xi_i = (\psi \wedge \chi)$

(iii) es gibt $j < i$ mit $\xi_j = \psi$ und $\xi_i = \forall x \psi$.

SUBSTRUKTURLEMMA

Falls $\mathfrak{A}$ eine $\boxed{\text{Substruktur}}$ von $\mathfrak{B}$ ist und φ ein $\boxed{\text{universeller Ausdruck}}$ mit freien Variablen $x_1, \dots, x_n$. Dann gilt für alle $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\boxed{\text{falls}}\ \mathfrak{B}\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n} \models \varphi, \ \boxed{\text{so}}\ \mathfrak{A}\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n} \models \varphi.$$

Wie Isomorphielemma, aber

1. nur für universelle Ausdrücke
2. nur $\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}$.

Korollar Falls $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und φ ein universeller Satz. Dann

$$\mathfrak{B} \models \varphi \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi.$$

φ_A^* ist ein universeller Satz

$$\underline{\forall x}\ \underline{\forall y}\ \underline{\forall z}\ \underbrace{(x*y)*z = x*(y*z)}_{\text{quantorenfrei}}$$

$\varphi_{N_T}^*$ ist kein universeller Satz

Beweis des Substrukturlemmas
durch Induktion nach dem Aufbau der universellen Ausdrücke:

1. alle quantorenfreien Ausdrücke ✓
2. falls gilt für ψ, χ $\longrightarrow$ $\psi \vee \chi$ und $\psi \wedge \chi$ ✓
3. falls gilt für ψ $\longrightarrow$ $\forall x \psi$.

VERBLEIBT Schritt 3.

3.5.5 Lemma *Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ S-Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Ferner sei $\beta\colon \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to A$ eine Belegung in $\mathfrak{A}$. Dann gilt für jeden S-Term t*

$$\boxed{(\mathfrak{A}, \beta)(t) = (\mathfrak{B}, \beta)(t)}$$

und für jeden quantorenfreien S-Ausdruck φ

$$\boxed{(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \;\text{ gdw }\; (\mathfrak{B}, \beta) \models \varphi.}$$

Beweis des Isomorphielemmas:

Terme — Var, SK, SF

Formeln — $\equiv$, R, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$

Strukturerhaltung [folgt aus der Tatsache, daß $id : A \longrightarrow B$ strukturerhaltend ist]

Injektivität [$id : A \longrightarrow B$ injektiv]

folgt direkt

Surjektivität

Schritt 3. Angenommen:

$$\mathfrak{B}, \beta \models \psi \implies \mathfrak{A}, \beta \models \psi$$

Zu zeigen: $\mathfrak{B}, \beta \models \forall x \psi \implies \mathfrak{A}, \beta \models \forall x \psi.$

Beweis

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}, \beta \models \forall x \psi &\iff \text{für alle } b \in B \quad \mathfrak{B}, \beta\tfrac{b}{x} \models \psi \\
&\implies \text{für alle } a \in A \quad \mathfrak{B}, \beta\tfrac{a}{x} \models \psi \\
&\implies \text{für alle } a \in A \quad \mathfrak{A}, \beta\tfrac{a}{x} \models \psi \\
&\iff \mathfrak{A}, \beta \models \forall x \psi.
\end{aligned}$$

vgl. φ_A^* im Übergang von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{N}, +)$.

q.e.d. (Substrukturlemma)

Bsp. Gruppen $S = \{*\}$ $\boxed{\varphi_A^* \wedge \varphi_{NI}^*}$ AXIOMEN-SYSTEM

universell nicht universell

$(\mathbb{N}, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +)$ mit $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe

Grund: Das S-Axiomensystem ist nicht universell.

$S^* = \{*, e, i\}$

$$\varphi_A^* \wedge \forall x \, (x * e \equiv x \wedge e * x \equiv x \wedge i(x) * x \equiv e \wedge x * i(x) \equiv e)$$

UNIVERSELLER SATZ

UNIVERSELL

Noch ein Beispiel: Ringe mit Eins
vs
Eins-Ringe

Wir hatten gesehen, daß es in der Sprache $S = \{\oplus, \otimes\}$ Ringe mit Eins gibt, die Unterringe haben, die keine Ringe mit Eins sind.

$$\varphi_E^{\otimes} = \exists e \, \forall x \, (x \otimes e \equiv x \wedge e \otimes x \equiv x)$$

NICHT UNIVERSELL

Das ist nicht möglich bei Eins-Ringen

$$\varphi_{\mathbb{1}}^{\otimes} = \forall x \, (x \otimes \mathbb{1} \equiv x \wedge \mathbb{1} \otimes x \equiv x)$$

UNIVERSELL

Das Bsp. wird ein Ring mit Eins sein, der einen Unterring mit Eins hat, der kein Unter-Eins-Ring ist.

Betrachten Sie $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} \\ a_{01} & a_{11} \end{pmatrix}$ 2×2-Matrizen über $\mathbb{Q}$.

Haben Addition $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} \\ a_{01} & a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{00} & b_{10} \\ b_{01} & b_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}+b_{00} & a_{10}+b_{10} \\ a_{01}+b_{01} & a_{11}+b_{11} \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \ldots$

Neutrales Element $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

<u>Unterring</u> $\left\{ \begin{pmatrix} a_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a_{00} \in \mathbb{Q} \right\}$ Dies ist ein Unterring welcher <u>NICHT</u> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ enthält.

Aber der Unterring hat eine Eins, nämlich $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

SUBSTITUTION

Grundidee:

$\varphi(x)$ $\leadsto$ $\varphi(y)$

x Variable

ersetzen systematisch x durch y

Es sollten $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ gleichbedeutend sein.

Bsp.

$$\varphi = \boxed{\exists z \;\; z+z \equiv x}$$

Ausdruck der Sprache $S = \{+\}$

$$(\mathbb{Z}, +, \beta) \models \varphi \iff \beta(x) \text{ ist gerade}$$

ERSETZE x durch y:

$$\varphi\frac{y}{x} := \exists z \;\; z+z \equiv y$$

$$(\mathbb{Z}, +, \beta) \models \varphi\frac{y}{x} \iff \beta(y) \text{ ist gerade}$$

$\beta(x)$ gerade $\Longleftrightarrow$ $\varphi = \exists z \; z+z = x$

$\beta(y)$ gerade $\Longleftrightarrow$ $\varphi\frac{y}{x} = \exists z \; z+z = y$

$\varphi^* = \exists z \; z+z = z$ ~~"$\varphi\frac{z}{x}$"~~

Es gilt: $(\mathbb{Z}, +, \beta) \models \varphi^*$ für alle β.

Insbesondere hat sich die Bedeutung geändert!

Beobachtung: Was im Falle von φ^* schiefgegangen ist:

Verwendung einer Variable, die bereits vorkommt.

Aber manchmal wollen wir das:

x durch x^2 ersetzen $\varphi\frac{x^2}{x} = \exists z \; z+z = x^2$

$\Longleftrightarrow \beta(x^2)$ ist gerade.

Das wirkliche Problem ist die Einsetzung von z in den Wirkungsbereich des Quantors $\exists z$.

SIMULTANE vs KONSEKUTIVE Substitution

$$\varphi\frac{x}{y}\frac{y}{x} \qquad\qquad \left(\varphi\frac{x}{y}\right)\frac{y}{x}$$

$x \equiv y \rightsquigarrow y \equiv x \qquad\qquad x \equiv y \rightsquigarrow x \equiv x \rightsquigarrow y \equiv y$

üblicher SEARCH + REPLACE – Trick:

$$\varphi\frac{x}{y}\frac{y}{x} = \left(\left(\varphi\frac{u}{y}\right)\frac{y}{x}\right)\frac{x}{u}$$

$x \equiv y \rightsquigarrow x \equiv u \rightsquigarrow y \equiv u$

$\rightsquigarrow y = x$

Simultane Substitution kann durch konsekutive Substitution emuliert werden, ist dann aber komplizierter.

3.8.1 Definition

(a) $\boxed{x\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}} := \begin{cases} x, & \text{falls } x \neq x_0, \ldots, x \neq x_r \\ t_i, & \text{falls } x = x_i \end{cases}$

(b) $c\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := c$

(c) $[ft'_1\ldots t'_n]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := ft'_1\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\ldots t'_n\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$.

Eckige Klammern dienen hier und im Folgenden der besseren Lesbarkeit.

Simultan die Variablen

$x_0 \ldots x_r$

durch Terme $t_0 \ldots t_r$

ersetzen.

3.8.2 Definition

(a) $[t'_1 \equiv t'_2]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := t'_1\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \equiv t'_2\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$

(b) $[Rt'_1\ldots t'_n]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := Rt'_1\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\ldots t'_n\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$

(c) $[\neg\varphi]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \neg[\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}]$

(d) $(\varphi \vee \psi)\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \left(\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \vee \psi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\right)$

Wir erinnern uns an

$$\left(\exists z \;\; z+z = x\right)\frac{z}{x}$$

(e) Seien $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ $(i_1 < \ldots < i_s)$ die Variablen x_i unter $x_0, \ldots, x_r$ mit

$$x_i \in \text{frei}(\exists x\varphi) \text{ und } x_i \neq t_i.$$

Insbesondere ist $x \neq x_{i_1}, \ldots, x \neq x_{i_s}$. Dann setzen wir

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} := \exists u\left[\varphi\frac{t_{i_1}\ldots t_{i_s}\, u}{x_{i_1}\ldots x_{i_s}\, x}\right];$$

dabei sei u die Variable x, falls x nicht in $t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ auftritt; sonst sei u die erste Variable von $v_0, v_1, v_2, \ldots$, die nicht in $\varphi, t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ vorkommt.

$\longrightarrow$ SUBSTITUTIONSLEMMA

— Substitution erhält Bedeutung.