Mathematische Logik & Mengenlehre

VORLESUNG IX

MENGENLEHRE

Gruppen	Mengen
$\forall x \quad e * x = x$ $\exists e \forall x \quad e * x = x$	die leere Menge existiert $\exists x \forall z (z \notin x)$
$\forall x \exists y \quad x * y = e$	für jede Menge x gibt eine Einermenge $\{x\}$ $\forall x \exists s \forall z (z \in s \leftrightarrow z = x)$

Was brauchen wir denn für Mengen?

$\emptyset$, $\{x\}$, $\{x,y\}$, (x,y) GEORDNETES PAAR

$x \cup y$, $x \cap y$, $x \times y$ CARTESISCHES PRODUKT

zweistellig

einstellig

$\mathrm{Pot}(x) \quad [:= \{ y \,;\, y \subseteq x \}]$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Welche Sprache wollen wir für die Mengenlehre wählen?

Brauchen wir für $\{.\}$, $\{.,.\}$, $(.,.)$, $\mathrm{Pot}(.)$, $. \cup .$, ...
jeweils ein Funktionssymbol?

$$\mathrm{Pot}(x) = \{ y \,;\, y \subseteq x \}$$

Brauchen wir für $\subseteq$ dann auch ein zweist. Relationssymbol?

Betrachten Sie die Formel für die Einermenge:

$$\forall x \, \exists s \, \underbrace{\forall z \, (z \in s \longleftrightarrow z = x)}_{\text{DEFINITION DER FORM}}$$

$$\forall z \, (z \in s \longleftrightarrow \Phi(z))$$

Dies bedeutet: solange die Operationen definierbar sind, brauchen wir sie nicht in der Sprache, sondern können sie im Rahmen der Definitions-erweiterung hinzufügen.

z.B. $x \subseteq y \;:\Longleftrightarrow\; \underbrace{\forall z (z \in x \longrightarrow z \in y)}_{\Phi(x,y)}$

Die Sprache kann um ein zweist. Rel. symbol $\subseteq$ erweitert werden, welches durch Φ als relationale Definitionserweiterung definiert wird.

Für Operationen (funktionale Definitionserweiterungen)
braucht man:

1. eine Formel $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$
2. Existenz: $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \, \Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$
3. Eindeutigkeit: $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \forall y'$
$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \Phi(x_1, \ldots, x_n, y') \longrightarrow y = y'.$$

Nur unter diesen Bedingungen können wir ein neues Funktionssymbol hinzufügen.

[Beispiele später.]

Die Sprache der Mengenlehre

"Epsilon"
"Elementsymbol"

$$S = S_R = \{\in\}$$

zweistelliges Relationssymbol

Autoren schreiben z. B. $L_\in$, $\mathcal{L}_\in$, LST
LANGUAGE OF SET THEORY

Alle anderen mengentheoretischen Relationen / Operationen werden auf dieses Symbol per Definition zurückgeführt.

WICHTIG

Was ist unser Mengenbegriff?

(1) Fangen Sie mit $\emptyset$ an.
Fügen Sie 5 hinzu. $\rightsquigarrow \{5\}$
Fügen Sie 2 hinzu. $\rightsquigarrow \{5,2\}$

Fangen Sie mit $\emptyset$ an.
Fügen Sie 2 hinzu $\rightsquigarrow \{2\}$
Fügen Sie 5 hinzu $\rightsquigarrow \{2,5\}$

$\overset{?}{=}$

Spielt die Reihenfolge, in der die Objekte in die Menge gekommen sind, eine Rolle? NEIN.

[Dinge, bei denen die Reihenfolge eine Rolle spielt, heißen Tupel.]

(2) Fangen Sie mit $\emptyset$ an.

Fügen Sie 5 hinzu. $\rightsquigarrow \{5\}$

Fügen Sie nochmals 5 hinzu. $\rightsquigarrow \{5,5\}$

$= ?$

De Anzahl der Vorkommnisse eines Elements spielt keine Rolle: $\{5\} = \{5,5\}$.

MULTIMENGEN

(3) Es kann sein, daß es unterschiedliche Beschreibungen der gleichen Menge gibt. Soll das als zwei verschiedene Mengen zählen.

SUPERMAN = CLARK KENT

"Lois Lane weiß, daß $\boxed{\text{Superman}}$ übermenschliche Stärke hat"

CLARK KENT

WISSEN ist ein intensionaler Begriff

KONVENTION:

Unser Mengenbegriff soll rein extensional sein.

Extensionalitätsaxiom (Ext):

Umfangsgleiche Mengen sind gleich.

Also:

$$\boxed{\forall xy\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).}$$

$\forall x \forall y$

$\leftrightarrow$

$\equiv$

Bemerkung

$$\forall x \forall y\,(x \equiv y \longrightarrow \forall z\,(z \in x \longleftrightarrow z \in y))$$

folgt direkt aus dem Substitutionslemma.

Man kann Ext als Definition der Gleichheit vermittels $\in$ sehen.

Das erste nichttriviale Axiom

(LM) Das leere Mengenaxiom

$$\exists x \forall z\,(z \notin x)$$

$$\exists x \forall z\ \neg z \in x$$

$$\exists x\ \underbrace{\forall z\,(z \in x \longleftrightarrow z \not\equiv z)}_{\text{DEFINTION}} \qquad \Phi(x)$$

Falls Ext + LM gelten, so sind Existenz und Eindeutigkeit der leeren Menge gewährleistet.

Existenz folgt aus LM

Eindeutigkeit folgt aus Ext.

Nochmals zur Eindeutigkeit

$$\mathfrak{A} \models Ext \wedge LM$$

Das bedeutet $\mathfrak{A} \models \exists x \forall y (y \notin x)$

Also ex. ein $a \in A$ mit für alle $b \in A$ gilt $(b,a) \notin \in^{\mathfrak{A}}$.

Seien a, a' zwei Elte von A mit dieser Eigenschaft

Dann gilt $$\mathfrak{A}\frac{a}{x}\frac{a'}{y} \models \forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y)$$

$$\xRightarrow{Ext} \mathfrak{A}\frac{a}{x}\frac{a'}{y} \models x \equiv y \Longrightarrow a = a'$$

Also können wir, falls $Ext + LM$ gelten, ein neues Konstantensymbol $\emptyset$ einführen, welches durch das eindeutig bestimmte Elt, definiert durch $\forall z (z \notin x)$, interpretiert wird.

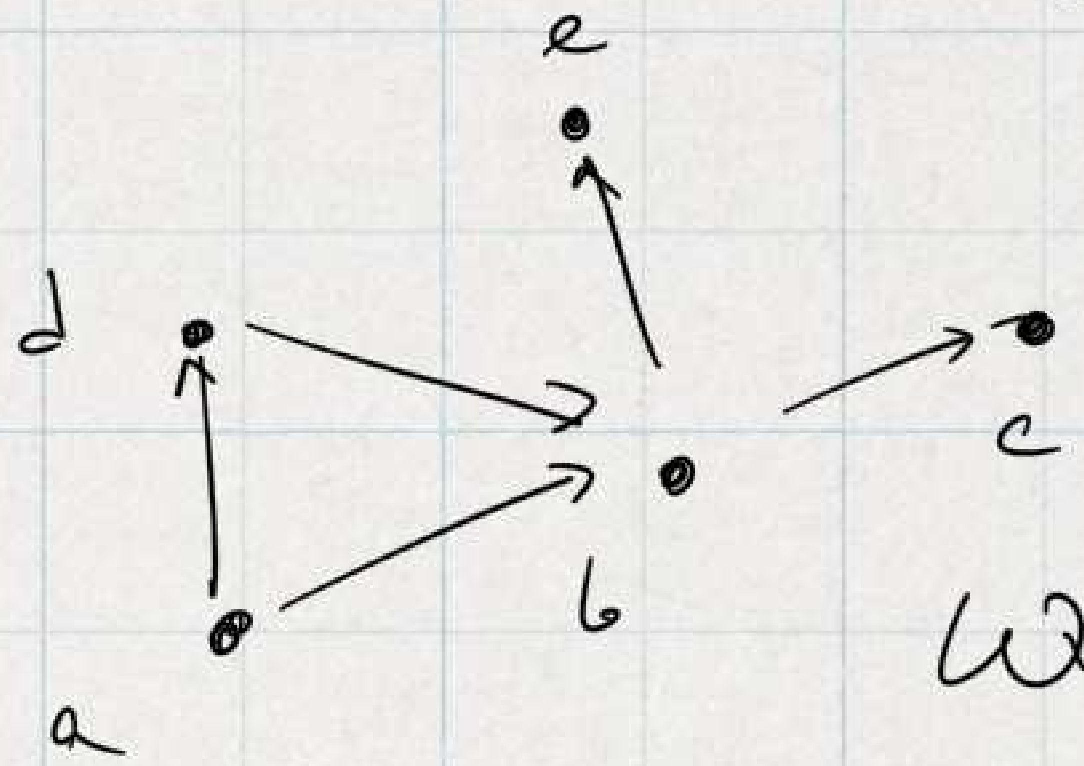
Beispielstrukturen

$L^S = \mathcal{L}_\in = LST$ hat nur ein zweistelliges Relationssymbol.

S-Strukturen sind daher $\mathfrak{A} = (A, E)$ mit $E \subseteq A^2$, also das, was man auch als "gerichtete Graphen".

$A \longrightarrow$ Punkte, Knoten, Ecken

$E \longrightarrow$ Kanten (gerichtet)



$A = \{a, b, c, d, e\}$

mit $E = \{(a,d), (a,b), (d,b), (b,e), (b,c)\}$

Wir interpretieren $\underset{v}{\bullet} \longrightarrow \underset{w}{\bullet}$ als $(v,w) \in E$.

Oder: v ist ein Element von w!

Einfachste Beispiele

$A = \{a\}$

Auf der Menge A gibt es genau zwei S-Strukturen:

$$\mathfrak{A}_1 := (A, \emptyset)$$

$$\mathfrak{A}_2 := (A, \{(a,a)\})$$

ACHTUNG!

Dies ist unser informelles Symbol für die leere Menge in der Mathematik! **NICHT** verwechseln mit dem formalen, durch funktionale Definitionserweiterung im Kontext Ext+LM eingeführten Symbol.

Ext, LM

Fragen wir uns, ob diese Axiome in $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ gelten?

Klar: Ext gilt trivialerweise in einpunktigen Strukturen.
[Erinnerung an eine Übungsaufgabe.]

LM $\quad \exists x \forall z \, (z \notin x)$

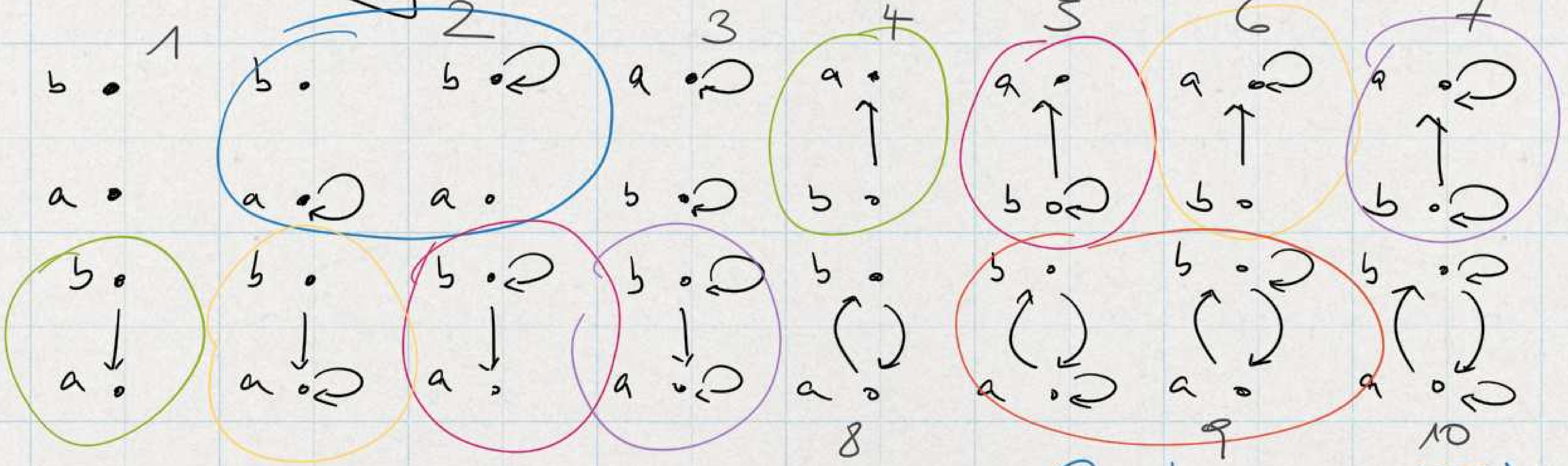
Offensichtlich: $\mathfrak{A}_1 \models \mathrm{Ext} \wedge \mathrm{LM}$

$$\mathfrak{A}_2 \models \mathrm{Ext} \wedge \neg \mathrm{LM}.$$

Nun zu den zweipunktigen Modellen:

$A = \{a, b\}$, $a \neq b$.

Kombinatorisch 16 Möglichkeiten: nicht alle verschieden



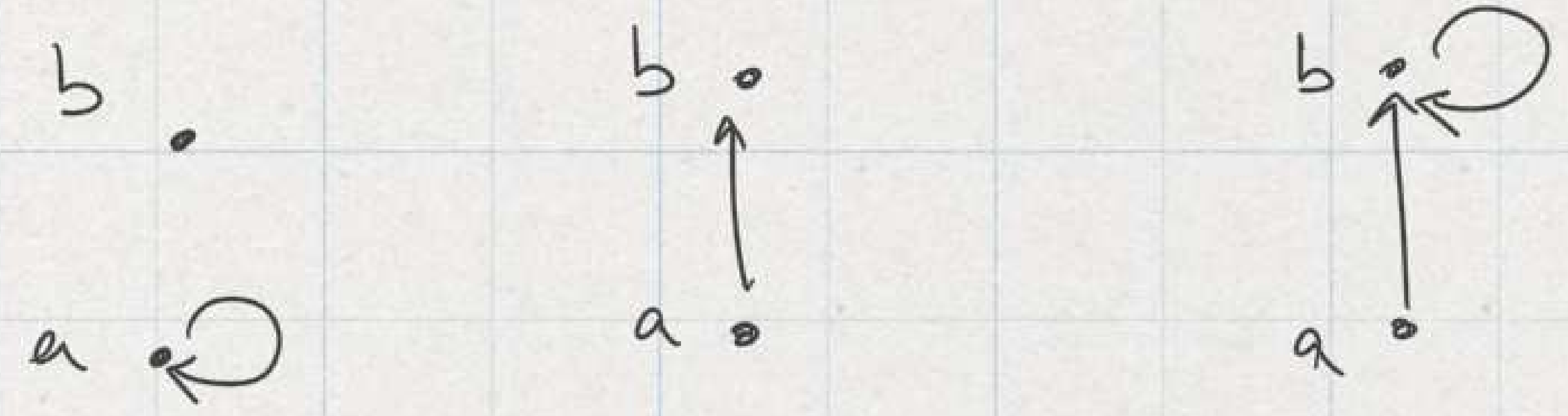
16

Gleich = ISOMORPH

Bleiben 10 Fälle.

Ext: ~~1~~ 2 3 4 ~~5~~ 6 7 8 9 ~~10~~ — 7 erfüllen Ext.

LM: 2 ~~3~~ 4 6 ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ — 3 erfüllen Ext+LM



(2) (4) (6)

<u>Frage</u> Was bedeutet $\underline{a \subseteq b}$ in diesen Modellen?

$\forall z \, (z \in a \longrightarrow z \in b)$

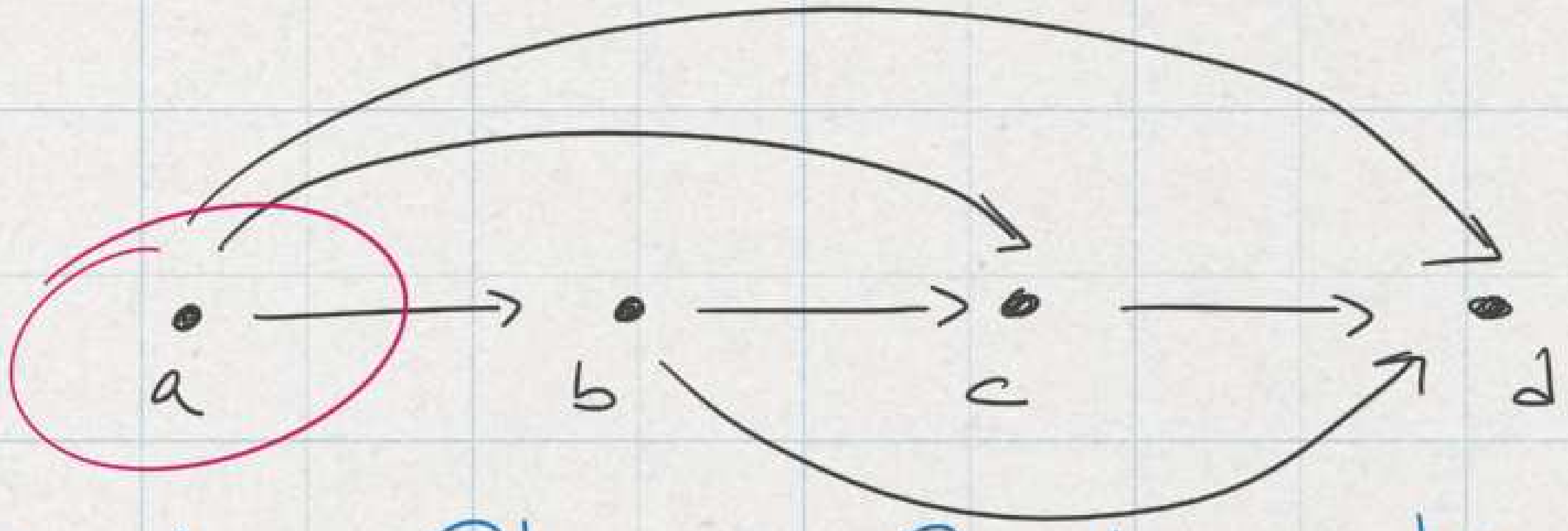
(2)	(4)	(6)
$\cancel{a \subseteq b}$	$a \subseteq b$ ✓	$a \subseteq b$ ✓
$b \subseteq a$ ✓	$\cancel{b \subseteq a}$	$\cancel{b \subseteq a}$

Ext impliziert, d.h.

$a \subseteq b \wedge b \subseteq a$

$\Longrightarrow a = b$

$\mathfrak{A}$



Ecke des Graphen	Pfeilvorgänger
a	—
b	a
c	a, b
d	a, b, c

POTENZMENGE

a, b, c, d

a, b, c $\longrightarrow$ d

a, b $\longrightarrow$ c

a $\longrightarrow$ b

Da für verschiedene Ecken im Graphen die Pfeilvorgänger unterschiedlich sind, gilt Ext.

Da a keine Pfeilvorgänger hat, gilt LM.

Für welche x, y gilt $x \subseteq y$?

Nach Tabelle erhalten wir:

$a \subseteq d$, $b \subseteq d$, $c \subseteq d$, $d \subseteq d$

$a \subseteq c$, $b \subseteq c$, $c \subseteq c$

$a \subseteq b$, $b \subseteq b$

$a \subseteq a$

$\mathrm{Pot}(x) := \{y \,;\, y \subseteq x\}$

Die Potenzmenge von c in $\mathfrak{A}$ ist d.