Mathematische Logik & Mengenlehre

Dritte Vorlesung

Wir bezeichnen das oben geschilderte Beweisverfahren für Kalküle im Spezialfall des Term- und Ausdruckskalküls als einen *Beweis durch Induktion über den Aufbau der Terme* bzw. *Ausdrücke*. Um nachzuweisen, dass alle S-Terme eine Eigenschaft E haben, reicht es, zu zeigen:

(T1)′ Jede Variable hat die Eigenschaft E.

(T2)′ Jede Konstante aus S hat die Eigenschaft E.

(T3)′ Haben die S-Terme $t_1, \ldots, t_n$ die Eigenschaft E und ist $f \in S$ n-stellig, so hat $ft_1 \ldots t_n$ die Eigenschaft E.

$Z \subseteq T_S$

Anwendungen

Bsp 1 $\square$ ist kein S-Term.

Beweis per Induktion über den Termaufbau

$Z := \{t \in T_S ; t \neq \square\}$

Beh. $Z = T_S$. Klar: $Var \subseteq Z$ $S_K \subseteq Z$.

Falls $t_1, \ldots, t_n \in Z$, so ist $ft_1 \ldots t_n \neq \square$.

Also per Induktion $Z = T_S$. q.e.d.

Bsp 2. Falls $t \in T_S$ mit einer Variable v_i anfängt, so ist $t = v_i$.

[Beweis über Induktion nach Termaufbau:

$$Z = \{ t \in T_S ; \text{ falls } t \text{ mit } v_i \text{ anfängt, so ist } t = v_i \}$$

1. t ist Variablensymbol
   - 1a. $t = v_j$ $(j \neq i)$, dann $t \in Z$
   - 1b. $t = v_i$, dann $t \in Z$.
2. t ist Konstantensymbol: dann fängt t nicht mit v_i an, also $t \in Z$.
3. $t = f t_1 \ldots t_n$ für f ein n-stelliges Fkt symbol und $t_1, \ldots, t_n \in Z$

   Dann fängt t nicht mit v_i an, also $t \in Z$.]

Bsp. 3 Falls $t \in T_S$ mit einem Konstantensymbol $c \in S_K$ anfängt, so ist $t = c$.

[$Z = \{ t \in T_S \,;$ falls t mit $c \in S_K$ anfängt, so ist $t = c \}$.

1. $t = v_j \quad \longleftarrow \quad t \in Z$ [vgl. 2 in Bsp 2]
2. $t = k \quad \longleftarrow \quad t \in Z$ [$k \neq c$ oder $k = c$]
3. $t = ft_1 \ldots t_n \quad \longleftarrow \quad t \in Z$ [t mit $f \neq c$ anfängt]]

Eindeutige Lesbarkeit von Termen

Arithmetik: $+$, $\times$

$a+b+c$ — $(a+b)+c$ — $a+(b+c)$

INFIXNOTATION

Unterschiedliche Terme, die [in $\mathbb{N}$] die gleiche Zahl bezeichnen: ASSOZIATIVGESETZ

$a+b\times c$ — $(a+b)\times c$ — $a+(b\times c)$

Im allgemeinen unterschiedliche Zahlen.

KONVENTION

Punktrechnung vor Strichrechnung!

Hoffnung: Präfixnotation ohne Klammern ist trotzdem eindeutig lesbar.

Erinnern Sie sich an:

$a+b$

$a+b+c$

Lemma 2.4.2(a) Für alle Terme t, t' gilt:

t ist kein echtes Anfangsstück von t'.

Terme & Ausdrücke sind Elemente von A_S^*:

$t \in T_S \quad \zeta \in A_S^*$

$t\zeta,\ \zeta t,\ \zeta\zeta,\ tt \in A_S^*$

$t \in A_S^*,\quad t : n \longrightarrow A_S$

$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

$t' \in A_S^*,\quad t' : n+k \longrightarrow A_S$

$n+k = \{0, 1, \dots, n, \dots, n+k-1\}$

t ist Anfangsstück von t' falls $\forall k < n$

$$t(k) = t'(k).$$

Falls $k = 0$ ist $t' = t\square$.

t ist echtes Anfangsstück von t' falls ex. $\zeta \neq \square$ mit $t' = t\zeta$.

Beweis von L 2.4.2 (a)

$Z = \{ t \,;$ für alle Terme t' ist t weder ein echtes As. von t' noch ist t' ein echtes As von $t \}$.

Per Induktion

1. $t = v_i$. Die Beh. folgt aus Bsp 2.
2. $t = c$ Die Beh. folgt aus Bsp. 3.
3. $t = ft_1 \dots t_n$ für $f \in S_F$ n-stellig.

$\boxed{\text{für } t_1, \dots, t_n \in Z}$

Ang. wir haben einen Term t' mit $\boxed{t\xi} = \boxed{t'}$ für $\xi \neq \square$.

t' muß ebenfalls mit dem Symbol f anfangen.

Also ist $t' = ft_1' \dots t_n'$. für Terme $t_1', \dots, t_n'$.

$$\underline{ft_1 \dots t_n \xi} = \underline{ft_1' \dots t_n'}$$

mix

$$f\, t_1\, t_2 \ldots t_n\, \zeta = f\, t_1'\, t_2' \ldots t_n'\, \square$$

f

$t_1(0) = t_1'(0)$

$t_2(0) = t_2'(0)$

Da $t_1 \in Z$ gilt: es gibt keinen Term t', so daß t_1 echtes As. von t' oder t' echtes As von t_1 ist.

$\Longrightarrow t_1 = t_1'$

Wiederum: da $t_2 \in Z$ gilt $t_2 = t_2'$.

Ebenso: $t_i = t_i'$ für $i = 1, \ldots, n$.

Also $\zeta = \square$.

q.e.d.

REKURSION

informell: $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

n_0

$$(*) \quad \begin{aligned} g(0) &:= n_0 \\ g(n+1) &:= f(g(n)) \end{aligned}$$

Warum funktioniert Rekursion?

$$g(n) = n^2 + 17$$

Es gibt eine eindeutig bestimmte, überall definierte Funktion $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die die Rekursionsgleichungen $(*)$ erfüllt.

EINDEUTIGKEIT

EXISTENZ

Beweis durch Induktion.

$Z = \{n;\ \forall g, g'$ die $(*)$ erfüllen, gilt $g(n) = g'(n)\}$ ✓

0 ✓ $\quad n \longrightarrow n+1$

$Z := \{n;\ g$ ist an n definiert$\} = \mathbb{N}$ ✓

0 ✓ $\quad n \longrightarrow n+1$

INDUKTION : Beweisprinzip

REKURSION : Definitionsprinzip

Wir verwenden Induktion, um zu beweisen, daß Rekursion funktioniert.

Falls etwas rekursiv definiert ist, so können wir (oft) Eigenschaften induktiv beweisen.

REKURSION über den Formelaufbau.

Definiere $F : T_S \longrightarrow X$ durch

$$(*) \left[\begin{array}{l} g_1 : Var \longrightarrow X \\ g_2 : S_K \longrightarrow X \\ F(ft_1 \ldots t_n) = h_f(F(t_1), \ldots, F(t_n)) \end{array}\right.$$

falls $f \in S_F$ n-stellig

für jedes solche f ein $h_f : X^n \longrightarrow X$

Wir bezeichnen das oben geschilderte Beweisverfahren für Kalküle im Spezialfall des Term- und Ausdruckskalküls als einen *Beweis durch Induktion über den Aufbau der Terme* bzw. *Ausdrücke*. Um nachzuweisen, dass alle S-Terme eine Eigenschaft E haben, reicht es, zu zeigen:

(T1)′ Jede Variable hat die Eigenschaft E.

(T2)′ Jede Konstante aus S hat die Eigenschaft E.

(T3)′ Haben die S-Terme $t_1, \ldots, t_n$ die Eigenschaft E und ist $f \in S$ n-stellig, so hat $ft_1 \ldots t_n$ die Eigenschaft E.

Bsp. Die in einem Term enthaltenen Variablen:

Die Funktion heiße var:

$$\mathrm{Var} \longrightarrow \quad \mathrm{var}(v_i) := \{v_i\}$$

$$S_K \longrightarrow \quad \mathrm{var}(c) := \emptyset$$

$$f \longrightarrow \quad \mathrm{var}(f t_1 \ldots t_n) := \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{var}(t_i).$$

$$f v_0 v_1 v_2$$

$$\uparrow$$

$$\{v_0, v_1, v_2\}$$

Diese Funktion hätte nicht rekursiv definiert werden müssen.

S-Formeln

2.3.2 Definition *S-Ausdrücke* sind genau diejenigen Zeichenreihen in $\mathbb{A}_S^*$, welche man durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten kann:

(A1) Für S-Terme t_1, t_2 ist $t_1 \equiv t_2$ ein S-Ausdruck.

(A2) Sind $t_1, \ldots, t_n$ S-Terme und ist R ein n-stelliges Relationssymbol aus S, so ist $Rt_1 \ldots t_n$ ein S-Ausdruck.

(A3) Ist φ ein S-Ausdruck, so ist $\neg\varphi$ ein S-Ausdruck.

(A4) Sind φ und ψ S-Ausdrücke, so sind $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ S-Ausdrücke.

(A5) Ist φ ein S-Ausdruck und x eine Variable, so sind $\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ S-Ausdrücke.

ATOMARE AUSDRÜCKE

$\equiv$

$(\quad)$

$\wedge \quad \vee \quad \longrightarrow \quad \longleftrightarrow$

$\exists \quad \forall$

R

Wie bei den Termen erhalten wir einen Begriff der Formelableitung

Eine endliche Folge $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ von Zeichenketten heißt **Formelableitung** falls für alle $1 \leq i \leq n$ gilt

(A1) $\zeta_i = t_1 \equiv t_2$ für Terme t_1, t_2

(A2) $\zeta_i = Rt_1 \ldots t_n$ für $R \in S_R$ n-stellig und Terme $t_1, \ldots, t_n$.

(A3) es ex. $j, k < i$ mit

(A4) $\zeta_i = \neg\zeta_j$ oder $\zeta_i = (\zeta_j \wedge \zeta_k)$ oder $\zeta_i = (\zeta_j \vee \zeta_k)$ oder

(A5) $\zeta_i = (\zeta_j \rightarrow \zeta_k)$ oder $\zeta_i = (\zeta_j \leftrightarrow \zeta_k)$ oder $\zeta_i = \exists x \zeta_j$ oder $\zeta_i = \forall x \zeta_j$.

φ, ψ Formeln, so auch $(\varphi \wedge \psi)$

aber <u>nicht</u> $\varphi \wedge \psi$.

φ Formel, so auch $\exists x \varphi$

aber <u>nicht</u> $\exists x (\varphi)$

$\exists v_0 \; v_0 \equiv v_0 \longleftarrow$ Formel

$\exists v_0 \, (v_0 \equiv v_0)$ keine Formel

$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \big(\varphi(\varepsilon, \delta) \longrightarrow \psi(\varepsilon, \delta)\big)$

$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \big(\varphi(\varepsilon, \delta)\big)$

Bsp. für das Ableiten von Formel / Ausdruck

Sprache $S = \{*, e, i\}$

$*$: Multiplikation, 2-stelliges Fkt.symbol

e: neutrales Element, Konstantensymbol

i: inverses, 1-stelliges Fkt.symbol

AXIOME DER GRUPPENTHEORIE

Informell:

ASSOZIATIVGESETZ $\quad \forall x \forall y \forall z \; x(yz) = (xy)z$

NEUTRALES $\quad \forall x \; ex = xe = x$

INVERSES $\quad \forall x \; xx^{-1} = x^{-1}x = e$

$\forall x \forall y \forall z \ (xy)z = x(yz)$

$$\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \ \underbrace{**v_0v_1v_2}_{*(*v_0v_1,\, v_2)} \equiv \underbrace{*v_0*v_1v_2}_{*(v_0,\, *(v_1,v_2))} \qquad \varphi_A$$

$\forall x \quad xe = ex = x$

$$\forall v_0 \ (*v_0e \equiv v_0 \wedge *ev_0 = v_0) \qquad \varphi_N$$

$\forall x \quad xx^{-1} = x^{-1}x = e$

$$\forall v_0 \ (*v_0iv_0 \equiv e \ \wedge *iv_0v_0 \equiv e) \qquad \varphi_I$$

Die Formeln $\varphi_A, \varphi_N, \varphi_I$ bilden ein formales Axiomensystem der Gruppentheorie.

In einer Formel

$$\varphi = \exists v_0 \underbrace{(\; - \; - \; - \; - \;)}_{\text{Geltungsbereich}}$$

z.B. $\quad (v_0 \equiv v_0 \wedge \exists v_0 (- - -))$

hat das erste und zweite Vorkommnis von v_0
NICHT im Geltungsbereich von $\exists$.

Wir sagen, daß eine Variable frei in einer Formel vorkommt, wenn sie vorkommt und nicht im Geltungsbereich eines Quantors liegt. Ansonsten heißt sie gebunden.

Rekursionen funktionieren genauso für Formeln wie für Terme:
1. F wird auf den atomaren Formeln definiert
2. F wird auf $\neg\varphi$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$, $\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ fortgesetzt.

DEFINITION

$$\mathrm{frei}(t_1 \equiv t_2) := \mathrm{var}(t_1) \cup \mathrm{var}(t_2)$$

$$\mathrm{frei}(Rt_1 \dots t_n) := \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{var}(t_i)$$

$$\mathrm{frei}(\neg\varphi) := \mathrm{frei}(\varphi)$$

$$\mathrm{frei}(\varphi \,\overset{\wedge}{\underset{\substack{\rightarrow\\ \leftrightarrow}}{\vee}}\, \psi) := \mathrm{frei}(\varphi) \cup \mathrm{frei}(\psi)$$

$$\mathrm{frei}(\forall v_i \varphi) = \mathrm{frei}(\exists v_i \varphi) := \mathrm{frei}(\varphi) \setminus \{v_i\}$$

Eine Formel, die keine freien Variablen hat, nennen wir einen SATZ.