Mathematische Logik & Mengenlehre

Zweite Vorlesung

Präzise Definitionen:

BEWEIS
BEWEISBAR
WAHR

Wir wollen: Alles was beweisbar ist, ist wahr.

HILBERTS Hoffnung: Alles was wahr ist, ist beweisbar.

[⇝ GÖDELscher Unvollständigkeitssatz]

Was ist Wahrheit?

$$\varphi = \exists x \left(x^2 = 2 \right)$$

Hier: In $\mathbb{Q}$ ist φ nicht wahr.

In $\mathbb{R}$ ist φ wahr.

$$\psi = \exists x \left(x^2 = 3 \right)$$

Es gilt: $\varphi \not\Rightarrow \psi$.

In $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist φ wahr, aber ψ nicht.

$$\varphi = \exists x\,(x^2 = 2)$$
$$\psi = \exists x\,(x^2 = 3)$$
$$\chi = \exists x\,(x^2 = 6)$$

$$\boxed{\varphi \wedge \psi \Longrightarrow \chi}$$

ALLGEMEIN-GÜLTIG.

[Ang. $x^2 = 2$
$y^2 = 3$

Dann ist $(xy)^2 = x^2y^2$
$= 2 \cdot 3 = 6$.]

Strukturen : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \ldots$

[Formeln / Aussagen] : φ, ψ, χ

~~WAHRHEIT~~ GÜLTIGKEIT ist eine Relation zw. Strukturen und Aussagen.

Wir brauchen formale Definitionen von:

"Formel" ← SYNTAX

"Struktur"

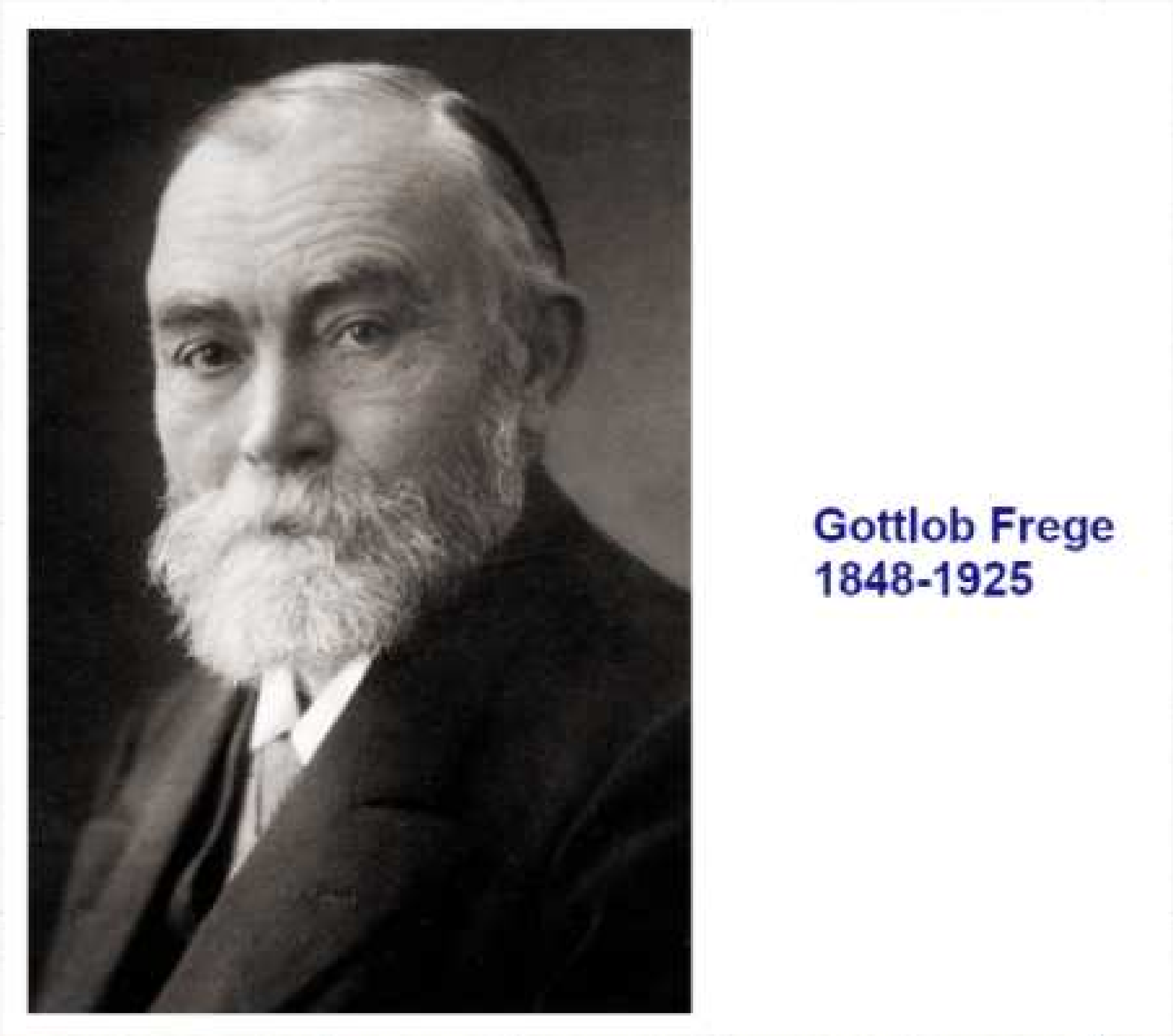
"gilt in". ← SEMANTIK

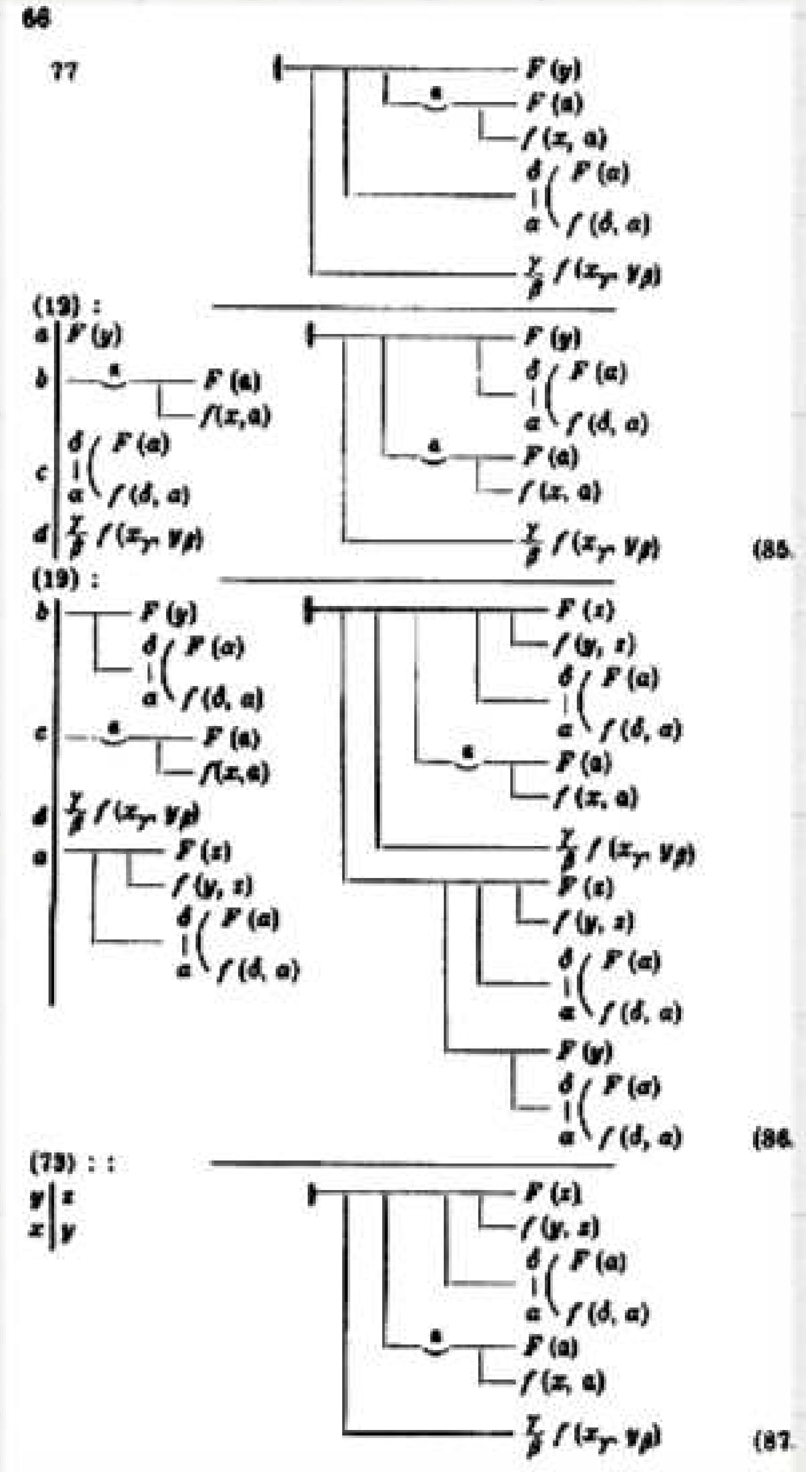
Bsp. $\exists x(x^2=2)$

Üblicherweise von links nach rechts und eindimensional.

Gegenbsp. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 2$.

$\cancel{f^n_m}$





Begriffsschrift

Formeln bestehen aus Symbolen / Zeichen

$\mathbb{A}$ Alphabet

$x+y$

$y+x$

$(x+y)+x$

$)(x$

Bsp.

$\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e, \ldots, z\}$

$\mathbb{A} = \{ (,), x, +, y \}$

Falls $\mathbb{A}$ ein Alphabet ist, so nennen wir eine endliche Folge von Elementen von $\mathbb{A}$ eine

Zeichenreihe. [Wörter]

Die Menge aller Zeichenreihen heißt $\mathbb{A}^*$.

Falls $\xi \in \mathbb{A}^*$, so ist die Länge von ξ die Anzahl der Elemente der Folge.

Box

Länge 0: leere Zeichenreihe $\square$

ε

Satz Falls ein Alphabet $\mathbb{A}$ abzählbar ist,
so ist auch $\mathbb{A}^*$ abzählbar.

höchstens abzählbar — X abzählbar:

es ex. Surj. von $\mathbb{N}$ nach X

abzählbar → X ist abzählbar unendlich

X abz. + X unendl.

Falls $\mathbb{A} = \emptyset$, so $\mathbb{A}^* = \{\square\}$.

Falls $\mathbb{A} \neq \emptyset$, so ist $\mathbb{A}^*$ unendlich.

<u>Beweis des Satzes</u> Haben Surjektion $g: \mathbb{N} \longrightarrow A$.

Müssen zeigen, daß A^* abzählbar ist.

Z.B. durch Injektion $f: A^* \longrightarrow \mathbb{N}$.

$$f(\square) := 1$$

$$f(\underbrace{g(i_0), \ldots, g(i_k)}) = p_1^{i_0+1} \cdot p_2^{i_1+1} \cdot \ldots \cdot p_{k+1}^{i_k+1}$$

wobei p_i die i-te Primzahl ist.

Da g Surjektion war, ist jedes Elt. von A^* von dieser Form.

Falls $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ Bijektion

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$$

$$h(h(x,y),z)$$

Rekursiv

Bijektion von

$$\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$$

IMPLIKATION

BI-IMPLIKATION

ÄQUIVALENZ

2.2.1 Definition Das *Alphabet einer Sprache erster Stufe* umfasst folgende Zeichen:

(a) $v_0, v_1, v_2, \ldots$ (*Variablen*); Var

(b) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (*nicht, und, oder, wenn – so, genau dann wenn*); LOGISCHE SYMBOLE

(c) $\forall, \exists$ (*für alle, es gibt*);

(d) $\equiv$ (*Gleichheitszeichen*);

(e)), ((*Klammersymbole*);

(f) (1) für jedes $n \geq 1$ eine (eventuell leere) Menge von *n-stelligen Relationssymbolen*; S_R

(2) für jedes $n \geq 1$ eine (eventuell leere) Menge von *n-stelligen Funktionssymbolen*; S_F

(3) eine (eventuell leere) Menge von *Konstanten*. S_K

Quantoren

All-quantor UNIVERSELL

Existenz-quantor

$$\boxed{S := S_R \cup S_F \cup S_K}$$

NICHT-LOGISCHE SYMBOLEN

Warum $\equiv$ für Gleichheit?

$x \equiv y = y \equiv x$

$\exists x \, (x^2 \equiv 2)$

EIGENTLICH $\exists v_0 \, (v_0^2 \equiv 2)$

$\mathbb{A}_S$ ist das Alphabet erster Stufe mit

$$S = S_R \cup S_F \cup S_K$$

$\mathbb{A}_S^* \rightsquigarrow$ $\square$, $(((v_0$, $\wedge\vee \longrightarrow v_0)(v_1$, $\exists v_0 (v_0 \equiv v_0)$

nicht sinnvoll

SINNVOLL

S-TERM

S-AUSDRUCK oder S-FORMEL

Algebra $x+y$ $x++$

Wir brauchen eine formale Def. von S-Term, um zu zeigen, daß Zeichenketten kein S-Term sind.

2.3.1 Definition *S-Terme* sind genau diejenigen Zeichenreihen in $\mathbb{A}_S^*$, welche man durch endlichmalige Anwendung der folgenden *Regeln* erhalten kann:

(T1) Jede Variable ist ein S-Term.

(T2) Jede Konstante aus S ist ein S-Term.

(T3) Sind die Zeichenreihen $t_1, \ldots, t_n$ S-Terme und ist f ein n-stelliges Funktionssymbol aus S, so ist $ft_1 \ldots t_n$ ein S-Term.

Bsp. $S = S_F \cup S_R \cup S_K$

$S_R = \emptyset$

$S_F = \{+\}$ $+$ 2-stellig

$S_K = \{0, 1\}$

PRÄFIX   INFIX

t_1 $+ v_0 v_1$ $v_0 + v_1$

$+(v_0, v_1)$

KEIN KOMMA!

t_2 $+01$

$+t_1 t_2 = \boxed{+ + v_0 v_1 + 0 1}$

INFORMELLE Schreibweise.

$(v_0 + v_1) + (0 + 1)$

2.3.1 Definition *S-Terme* sind genau diejenigen Zeichenreihen in $\mathbb{A}_S^*$, welche man durch endlichmalige Anwendung der folgenden *Regeln* erhalten kann:

(T1) Jede Variable ist ein S-Term.

(T2) Jede Konstante aus S ist ein S-Term.

(T3) Sind die Zeichenreihen $t_1, \ldots, t_n$ S-Terme und ist f ein n-stelliges Funktionssymbol aus S, so ist $ft_1 \ldots t_n$ ein S-Term.

1. v_0 (T1)
2. v_1 (T1)
3. $+v_0v_1$ (T3): $+$, 1., 2.
4. 0 (T2)
5. 1 (T2)
6. $+01$ (T3): $+$, 4., 5.
7. $++v_0v_1+01$ (T3): $+$, 3., 6.

Eine endliche nichtleere Folge von Zeichenketten

$$\zeta_1 \ldots \zeta_n$$

heißt TERMABLEITUNG falls für alle $i \leq n$ gilt:

(T1) ζ_i ist eine Variable oder

(T2) ζ_i ist ein Konstantensymbol oder

(T3) es ex. $i_1, \ldots, i_n < i$ und ein $f \in S_F$ n-stellig mit

$$\zeta_i = f\zeta_{i_1} \ldots \zeta_{i_n}.$$

INDUKTION nach dem Termaufbau.

T_S S-Terme.

Angenommen $Z \subseteq T_S$ mit

1. $Var \subseteq Z$
2. $S_K \subseteq Z$
3. Falls $f \in S_F$ n-stellig und $\xi_1, \dots, \xi_n \in Z$, so ist $f\xi_1 \dots \xi_n \in Z$.

Dann ist $Z = T_S$.

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION:
$Z \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in Z$ und falls $n \in Z$, so $n+1 \in Z$.
Dann gilt: $Z = \mathbb{N}$

Beweis des Satzes der Induktion über den Termaufbau

Wir hatten: $t \in T_S$ genau dann wenn eine Termableitung $\xi_1 \dots \xi_n$ mit $\xi_n = t$ existiert.

Per Induktion nach n zeigen wir:

Jeder Term mit Abl. der Länge n ist " Z.

$n = \underline{1}$: Falls ξ_1 eine TA ist, dann ist ξ_1 nach T1 oder nach T2 entstanden.

Also $\xi_1 \in Var \subseteq Z$ oder $\xi_1 \in S_K \subseteq Z$.

Ang. die Beh. gilt für n

Sei $\xi_1 \dots \underline{\xi_{n+1}}$ eine TA der Länge $n+1$

$$T1 \longrightarrow \xi_{n+1} \in Var \subseteq Z$$

$$T2 \longrightarrow \xi_{n+1} \in S_K \subseteq Z$$

$$T3 \longrightarrow \xi_{n+1} = f \underline{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}}$$

ξ_{i_j} hat TA der Länge $i_j < n+1$

$$\overset{IA}{\Longrightarrow} \xi_{i_j} \in Z. \Longrightarrow \xi_{n+1} \in Z.$$