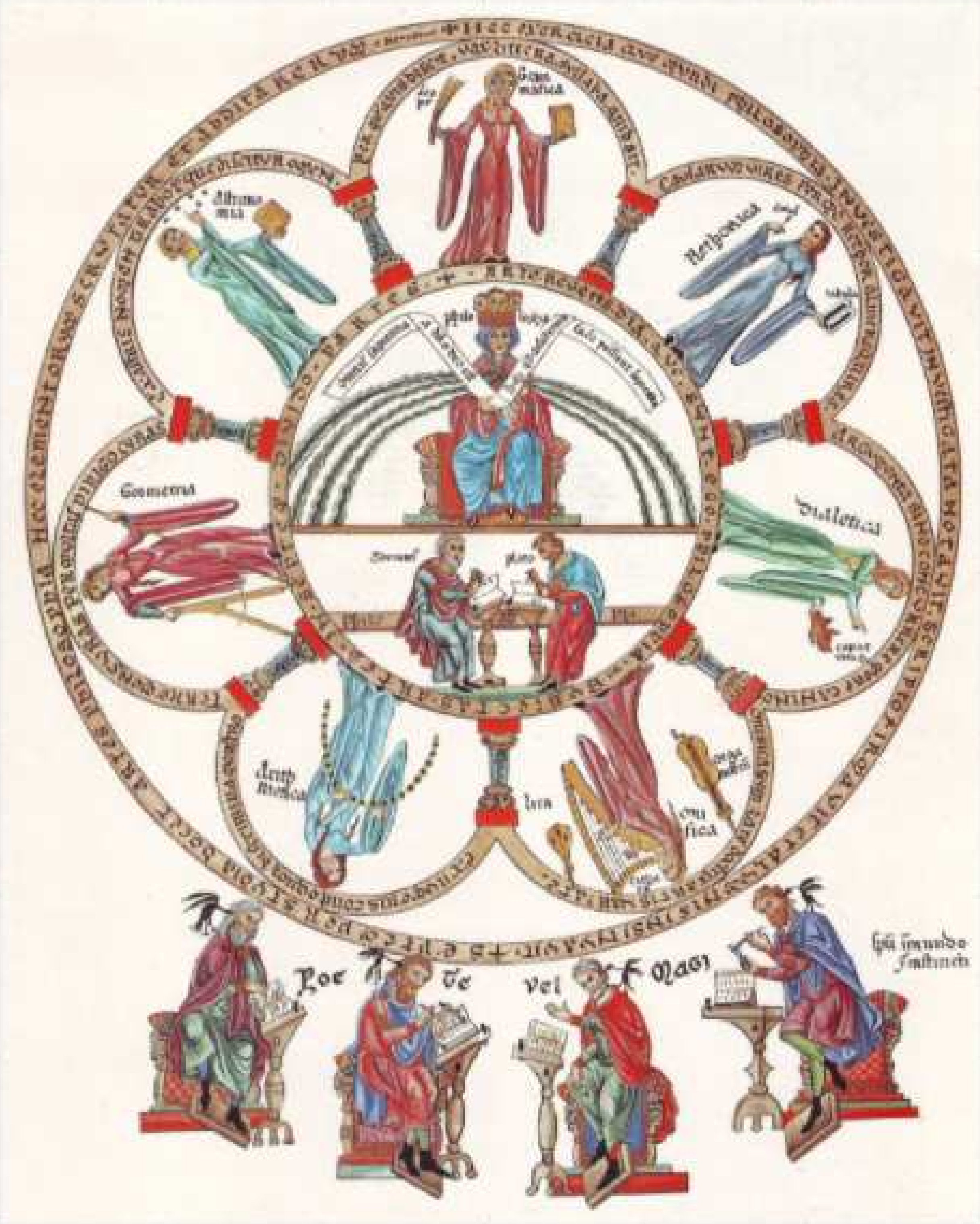
Mathematische Logik & Mengenlehre



Sieben freie Künste

SEPTEM ARTES LIBERALES

$\boxed{\text{TRIVIUM}}$

Rhetorik
Grammatik
Dialektik = LOGIK

QUADRIVIUM

Mathematische Künste

- Arithmetik
- Geometrie
- Musik
- Astronomie

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

Charles Babbage
1791-1871

Ada King Gräfin Lovelace
1815-1852

CALCULEMUS

Calculemus!

"quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos Computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos, et sibi mutuo (accito si placet amico) dicere: ***calculemus****."*

$\wedge$ UND $\quad$ 1 WAHR

$\vee$ ODER $\quad$ 0 FALSCH

$$\boxed{x \wedge 1 = x}$$

1 ist $\wedge$-neutral

$\wedge \mathrel{\hat{=}}$ Multiplikation

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \wedge 0 = 0$$

$$\boxed{x \vee 0 = x}$$

0 ist $\vee$-neutral

$\vee \mathrel{\hat{=}}$ Addition

$$\boxed{x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)}$$

DISTRIBUTIV-GESETZ

BOOLESCHE ALGEBRA

George Boole
1815-1864

Ernst Schröder
1841-1902

Logik $\hookrightarrow$ Mathematik

Mathematik ⟷ Logik.

ABSTRAKTION : – allgemeiner Funktionsbegriff

– Ideale

– allgemeiner Begriff der reellen Zahl

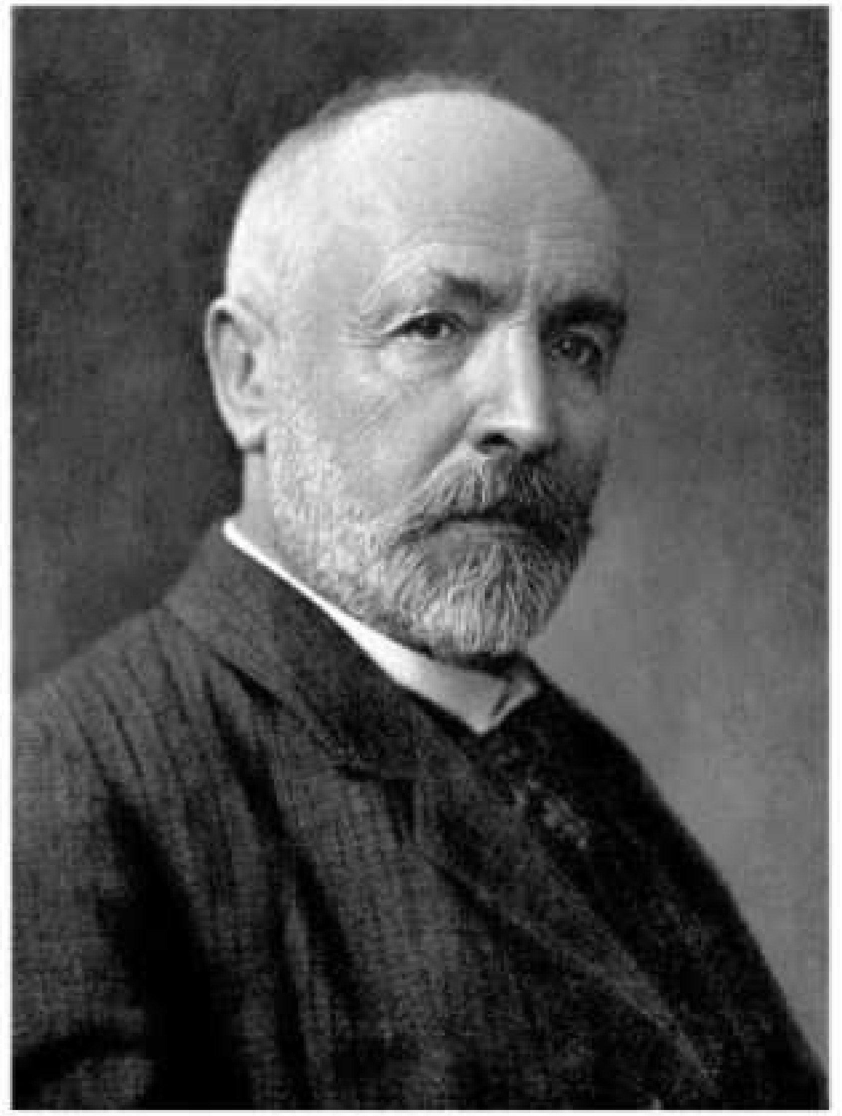
– Stetigkeit.

↓

PRÄZISE BEGRIFFE.

CLUSTERBEGRIFFE

Wie zeige ich, daß etwas NICHT unter einen Begriff fällt.



Georg Cantor
1845-1918

Gleichmächtigkeit

$X \sim Y$ X ist gleichmächtig zu Y falls eine Bijektion zw. X & Y existiert.

$\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}+1$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$ [braucht einen allg. Funktionenbegriff]

Theorem (Cantor). Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Menge ihrer Teilmengen (Potenzmenge von X). Dann gibt es keine Surjektion von X nach $\mathcal{P}(X)$.

Beweis Sei $f: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Funktion.

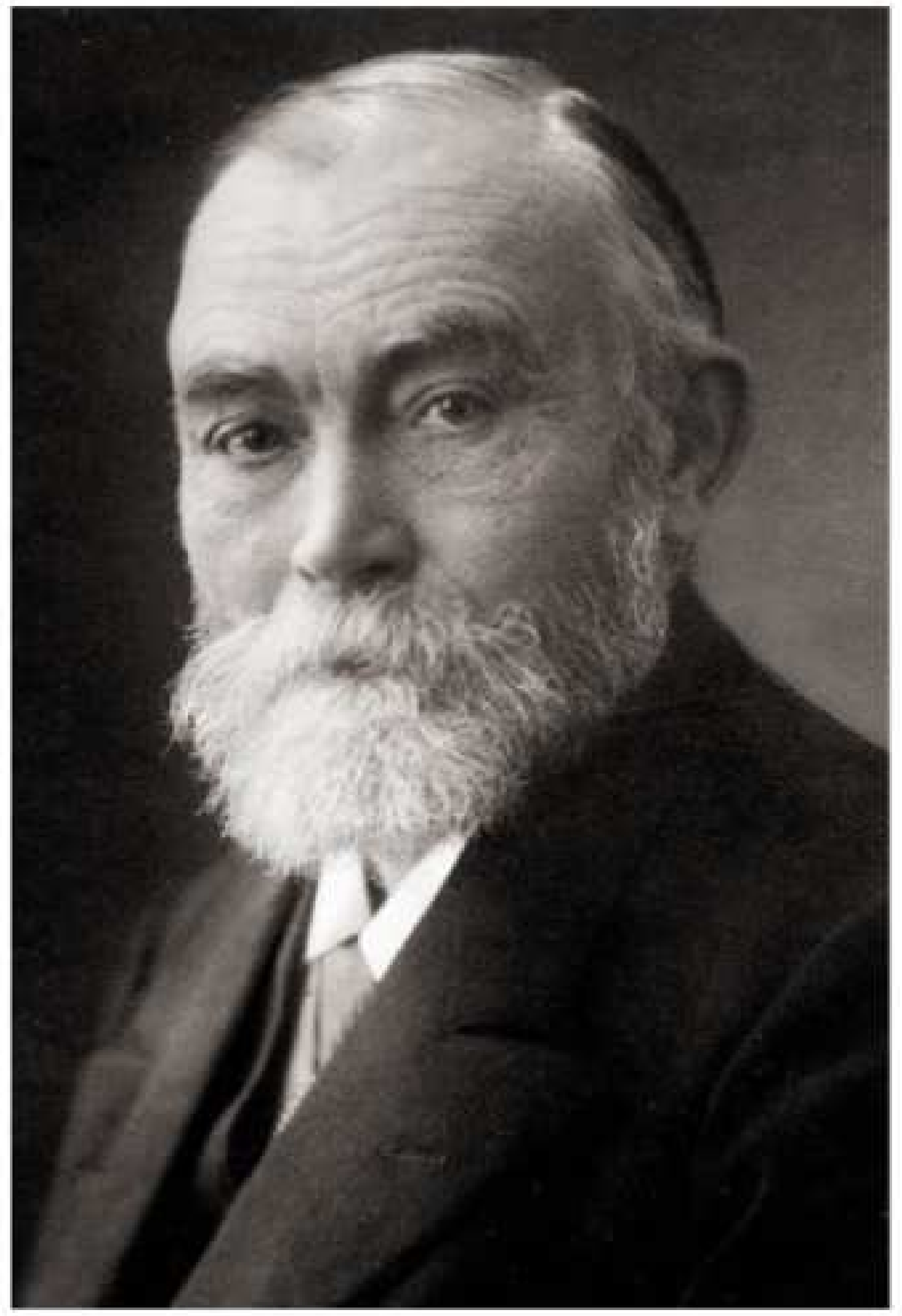
Setze $D = \{x \in X ; \; x \notin f(x)\}$. $[D \subseteq X]$

Beh. $D \notin \mathrm{Bild}(f)$. Ang. doch, also $f(d) = D$.

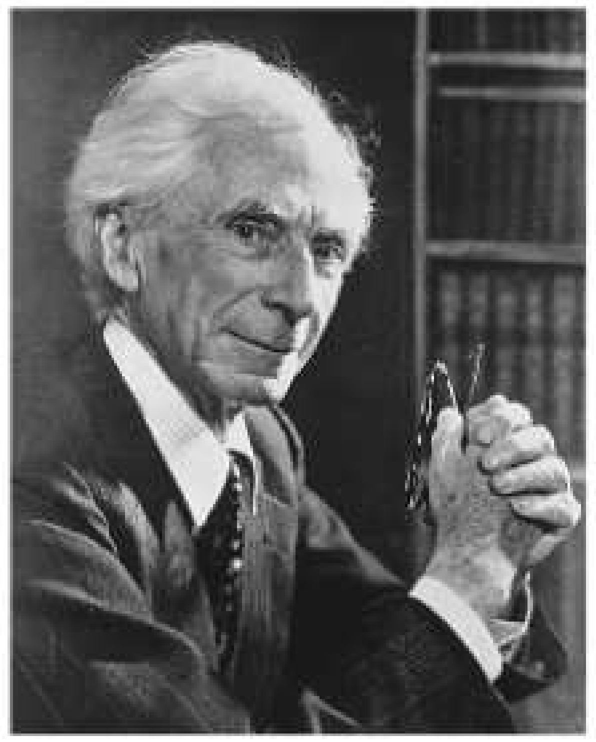
Dann:

$$d \in D \longleftrightarrow d \notin f(d) \longleftrightarrow d \notin D$$

$\lightning$ q.e.d.



Gottlob Frege
1848-1925



Bertrand Russell, Graf Russell
1872-1970

Grundgesetze der Arithmetik

GRUNDGESETZ V

Für jede Eigenschaft Φ gibt es eine Menge $M_{\Phi} := \{x;\ \Phi(x)\}$.

KOMPREHENSION

1901

$\Phi(x) =$ x enthält sich nicht selbst

$x \notin x$

Russellsche Paradox

$$M_{\Phi} \in M_{\Phi} \Longleftrightarrow M_{\Phi} \notin M_{\Phi}.$$

David Hilbert
1862-1943

HILBERTsches Programm

1920er : Ackermannscher Widerspruchsfreiheits "beweis".

Kurt Gödel
1906-1978

Kurt Gödel

NAIVE MENGENLEHRE

$$\cup \quad \cap \quad \bigcap \quad \bigcup \quad \ldots$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Axiomatische Mengenlehre

Wahrheit

Axiomatische Mengenlehre

→ ORDINALZAHLEN

→ KARDINALZAHLEN

Gödelscher Vollständigkeitssatz