Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 9

Abgabe am Dienstag, 4. Juni 2019 am Anfang der Übung. Ab Übungblatt #5 geben Sie bitte in Zweiergruppen ab.

(36) Eine Menge X heißt *endlich*, falls sie in Bijektion zu einer natürlichen Zahl ist; sie heißt *unendlich*, falls sie nicht endlich ist; sie heißt *Dedekind-unendlich*, falls sie eine echte Teilmenge $Y \subsetneqq X$ hat, die in Bijektion mit X steht.

Zeigen Sie:

(a) Jede Dedekind-unendliche Menge ist unendlich.

(b) Falls eine Injektion $f : \mathbb{N} \to X$ existiert, so ist X Dedekind-unendlich.

(37) Falls Ers das Axiomenschema der Ersetzung ist und Aus das Axiomenschema der Aussonderung, zeigen Sie, daß $\mathsf{Ers} \models \mathsf{Aus}$.

(38) Falls $\mathbf{P}_0 = (P_0, \leq_0)$ und $\mathbf{P}_1 = (P_1, \leq_1)$ partielle Ordnungen sind, so definieren wir die Summe $\mathbf{P}_0 \oplus \mathbf{P}_1 := (S, \leq_\oplus)$ und das Produkt $\mathbf{P}_0 \otimes \mathbf{P}_1 := (P, \leq_\otimes)$ wie folgt: $S := (\{0\} \times P_0) \cup (\{1\} \times P_1)$ und $P := P_0 \times P_1$, sowie

$$\begin{aligned}
(i,\ell) \leq_\oplus (j,\ell') \iff & \; i < j \text{ oder} \\
& (i = j = 0 \text{ und } \ell \leq_0 \ell') \text{ oder} \\
& (i = j = 1 \text{ und } \ell \leq_1 \ell') \text{ und} \\
(\ell_0,\ell_1) \leq_\otimes (\ell'_0,\ell'_1) \iff & \; \ell_1 <_1 \ell'_1 \text{ oder} \\
& (\ell_1 = \ell'_1 \text{ und } \ell_0 \leq_0 \ell'_0).
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Falls $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ totale Ordnungen sind, so sind auch die Summe $\mathbf{P}_0 \oplus \mathbf{P}_1$ und das Produkt $\mathbf{P}_0 \otimes \mathbf{P}_1$ totale Ordnungen.

(b) Falls $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ Wohlordnungen sind, so sind auch die Summe $\mathbf{P}_0 \oplus \mathbf{P}_1$ und das Produkt $\mathbf{P}_0 \otimes \mathbf{P}_1$ Wohlordnungen.

(c) Falls $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ abzählbar sind, so sind auch die Summe $\mathbf{P}_0 \oplus \mathbf{P}_1$ und das Produkt $\mathbf{P}_0 \otimes \mathbf{P}_1$ abzählbar.

(39) Sei $S := \{\dot{0}, \dot{<}, \dot{\mathrm{s}}\}$ eine Symbolmenge, wobei $\dot{0}$ ein Konstantensymbol, $\dot{<}$ ein binäres Relationssymbol und $\dot{\mathrm{s}}$ ein einstelliges Funktionssymbol ist. Wir nennen eine S-Struktur eine *Peano-Struktur*, falls sie die folgenden Axiome erfüllt:

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y (x \mathrel{\dot{<}} y \vee y \mathrel{\dot{<}} x \vee x = y)\\
&\forall x \forall y \forall z ((x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z) \rightarrow x \dot{<} z)\\
&\forall x (\neg x \mathrel{\dot{<}} x)\\
&\forall x (x = \dot{0} \vee \dot{0} \mathrel{\dot{<}} x),\\
&\forall x (x = \dot{0} \leftrightarrow \neg \exists y (x = \dot{\mathrm{s}}(y))),\\
&\forall x \forall y (\dot{\mathrm{s}}(x) = \dot{\mathrm{s}}(y) \rightarrow x = y),\\
&\forall x \forall y (x \mathrel{\dot{<}} \dot{\mathrm{s}}(y) \rightarrow x \mathrel{\dot{<}} y \vee x = y),\\
&\forall x (x \mathrel{\dot{<}} \dot{\mathrm{s}}(x)).
\end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{A} = (A, 0, <, \mathrm{s})$ eine Peano-Struktur. Wir nennen eine Teilmenge $Z \subseteq A$ ein *Anfangssegment*, falls für alle $a \in Z$ gilt: wenn $b < a$, so ist $b \in Z$. Wir nennen Z *nachfolgerabgeschlossen*, falls gilt: wenn $a \in Z$, so ist $\mathrm{s}(a) \in Z$. Ist $a \in A$, so definieren wir $I_a := \{b \in A\,;\, b < a\}$ als *das von a bestimmte Anfangssegment*. (Überlegen Sie sich kurz, daß I_a tatsächlich ein Anfangssegment ist.) Wir nennen Z *anfangssegmentabgeschlossen*, falls gilt: falls $I_a \subseteq Z$, so gilt $a \in Z$.

Wir sagen, daß $\mathfrak{A}$ das *Prinzip der vollständigen Induktion erfüllt*, falls A die einzige nichtleere nachfolgerabgeschlossene Teilmenge ist. Wir sagen, daß $\mathfrak{A}$ das *Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt*, falls A die einzige nichtleere anfangssegmentabgeschlossene Teilmenge ist.

Zeigen Sie:

(a) Jede Peano-Struktur, die das Prinzip der vollständigen Induktion erfüllt, erfüllt das Prinzip der Ordnungsinduktion.

(b) Es gibt Peano-Strukturen, welche das Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllen, aber nicht das Prinzip der vollständigen Induktion.

(c) Es gibt Peano-Strukturen, welche das Prinzip der Ordnungsinduktion nicht erfüllen.