Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 8

Abgabe am Dienstag, 28. Mai 2019 am Anfang der Übung. Ab Übungblatt #5 geben Sie bitte in Zweiergruppen ab.

(31) *[Wiederholt von Übungsblatt #7.]* Eine Menge I hieß *induktiv*, falls $\varnothing \in I$ und für alle $x \in I$, ist auch $x \cup \{x\} \in I$.

Analog nennen wir eine Menge Z *Zermelo-induktiv* falls $\varnothing \in Z$ und für alle $x \in Z$, ist auch $\{x\} \in Z$. Zeigen Sie:

(a) Falls es eine Zermelo-induktive Menge gibt, so gibt es eine minimale Zermelo-induktive Menge.

(b) Wir bezeichnen die minimale Zermelo-induktive Menge aus (a) mit $\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$. Dann gilt $\bigcup \mathbb{N}_{\text{Zermelo}} = \mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$.

(c) Falls $x \in \mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$, so gilt $x \notin x$.

(32) Sei $\mathfrak{G} = (V, E) \models \mathsf{FST}$ ein Graphenmodell. Falls $v \in V$, so gibt es ein $r_v \in \text{Rel}(v, v)$ definiert durch

$$(u, w) \in r_v \text{ genau dann, wenn } uEv,\ wEv \text{ und } uEw.$$

Wir hatten gesagt, daß v $\mathfrak{G}$-*transitiv* ist, falls für alle u und w gilt: falls uEw und wEv, dann uEv.

Was können Sie über die Aussagen "v ist $\mathfrak{G}$-transitiv" und "r_v ist eine transitive Relation in $\mathfrak{G}$" sagen? Impliziert eine dieser Aussagen die andere?

(33) Beweisen Sie die folgenden Aussagen über natürliche Zahlen in der Zermelo-Mengenlehre:

(a) Für alle n und m gilt: falls $m \in n$, so $n \notin m$.

(b) Für alle n und m gilt: falls $\mathrm{S}(n) = \mathrm{S}(m)$, so $n = m$.

(c) Für alle n und m gilt: entweder $n \in m$ oder $n = m$ oder $m \in n$.

(d) Für alle n, m und k gilt: $(n + m) + k = n + (m + k)$.

(e) Für alle n und m gilt: $n + m = m + n$.

(f) Für alle n gilt: $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.

(g) Für alle n und m gilt: $n \cdot m = m \cdot n$.

(34) Wir definieren

$$\Phi_{\text{plus}}(x, y, z) :\iff \exists a \exists b \exists f \exists g (a \cap b = \varnothing \wedge a \cup b = z \wedge f \in \text{Bij}(x, a) \wedge g \in \text{Bij}(y, b)).$$

Zeigen Sie, daß diese Formel eine binäre Operation auf $\mathbb{N}$ definiert (hierfür müssen Existenz und Eindeutigkeit von z gezeigt werden) und daß für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x + y = z \text{ genau dann, wenn } \Phi_{\text{plus}}(x, y, z).$$

(35) Sei $S := \{\dot{+}, \dot{0}\}$ die Symbolmenge mit einem zweistelligen Funktionssymbol und einem Konstantensymbol. Wir nennen die Menge

$$T_{\text{AM}} := \{\forall x \forall y \forall z((x \dot{+} y) \dot{+} z = x \dot{+} (y \dot{+} z)), \forall x(x \dot{+} \dot{0} = x), \forall x \forall y(x \dot{+} y = y \dot{+} x)\}$$

die *Axiome für abelsche Monoide* und sagen, daß eine S-Struktur $\mathfrak{A} := (A, +, 0)$ ein *abelsches Monoid* ist, falls $\mathfrak{A} \models T_{\text{AM}}$.

Ist $\mathfrak{A} = (A, +, 0)$ ein abelsches Monoid, so können wir durch

$$(a, b) \sim (a^*, b^*) \text{ genau dann, wenn } a + b^* = b + a^*$$

eine Äquivalenzrelation auf $A \times A$ definieren. Sei G die Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen: definieren Sie eine Operation $+$ auf G, so daß $(G, +)$ zu einer Gruppe wird, die $\mathfrak{A}$ als Untermonoid enthält. Überlegen Sie sich, welche Axiome der Zermelo-Mengenlehre Sie für diese Konstruktion gebraucht haben.

Folgern Sie daraus, daß es in jedem Modell der Zermelo-Mengenlehre Objekte gibt, die wir als die Strukturen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ interpretieren können. In welchem Sinne sind diese oder sind diese nicht eindeutig bestimmt?