



Abgabe am Dienstag, 7. Mai 2019 am Anfang der Übung. Ab Übungsblatt #5 geben Sie bitte in Zweiergruppen ab.

- (19) Sei S eine Symbolmenge und seien $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ und $\mathfrak{A}' = (A', \alpha')$ zwei S -Strukturen. In der Vorlesung hatten wir definiert, daß $\pi : A \rightarrow A'$ S -Isomorphismus heißt, falls π eine bijektive S -Einbettung von \mathfrak{A} nach \mathfrak{A}' ist. Zeigen Sie, daß dann π^{-1} eine S -Einbettung von \mathfrak{A}' nach \mathfrak{A} ist.
- (20) Sei $S = \{\dot{\times}\}$ die Symbolmenge mit einem zweistelligen Funktionssymbol und betrachten Sie die S -Struktur (\mathbb{Q}, \cdot) . Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen von \mathbb{Q} S -definierbar sind und geben Sie entweder eine definierende Formel oder einen S -Automorphismus, welcher die Menge nicht auf sich selbst abbildet:

- (a) $\{1\}$,
- (b) $\{-1\}$,
- (c) $\{-1, 1\}$,
- (d) $\{2\}$,
- (e) $\{q \in \mathbb{Q}; q = \frac{2^n}{2^m} \text{ für } n, m \in \mathbb{N} \text{ und } m \neq 0\}$ und
- (f) $\{q \in \mathbb{Q}; |q| \leq 1\}$.

- (21) Seien S eine Symbolmenge, $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ eine S -Struktur und φ eine S -Formel mit n freien Variablen ($n > 0$). Verwenden Sie die Definitionen der relationalen und funktionalen Übersetzungen rt und ft aus der Vorlesung.

- (a) Sei \mathfrak{A}^+ die relationale Definitionserweiterung von \mathfrak{A} um ein n -stelliges Relationssymbol über die Formel φ . Die erweiterte Symbolmenge heiße wie in der Vorlesung S^+ . Zeigen Sie, daß für alle S^+ -Formeln ψ und alle Belegungen β gilt:

$$\mathfrak{A}^+, \beta \models \psi \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{A}, \beta \models rt(\psi).$$

- (b) Nehmen Sie an, daß $\text{Th}(\mathfrak{A})$ Existenz und Eindeutigkeit von durch φ definierten Objekten impliziert. Sei dann \mathfrak{A}^+ die funktionale Definitionserweiterung von \mathfrak{A} um ein $(n-1)$ -stelliges Funktionssymbol über die Formel φ . (Wir betrachten Konstantensymbole als 0-stellige Funktionssymbole.) Die erweiterte Symbolmenge heiße wie in der Vorlesung S^+ . Zeigen Sie, daß für alle S^+ -Formeln ψ und alle Belegungen β gilt:

$$\mathfrak{A}^+, \beta \models \psi \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{A}, \beta \models ft(\psi).$$

- (22) Wie in Aufgabe (20), betrachten Sie die Symbolmenge $S = \{\dot{\times}\}$ und die S -Struktur $\mathfrak{A} := (\mathbb{Q}, \cdot)$.

- (a) Ist die Struktur $(\mathbb{Q}, \cdot, <)$ eine relationale Definitionserweiterung von \mathfrak{A} ?
- (b) Ist die Struktur $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ eine funktionale Definitionserweiterung von \mathfrak{A} ?