Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 4

Abgabe am Dienstag, 30. April 2019 am Anfang der Übung.

(15) Sei S die Symbolmenge mit $S_{\mathrm{K}} := \{\dot{0}, \dot{1}\}$, $S_{\mathrm{F}} := \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{\oplus}, \dot{\otimes}\}$ und $S_{\mathrm{R}} := \{\dot{V}, \dot{S}\}$, sowie $\sigma(\dot{+}) = \sigma(\dot{\oplus}) = \sigma(\dot{\otimes}) = 2$ und $\sigma(\dot{-}) = \sigma(\dot{V}) = \sigma(\dot{S}) = 1$. Geben Sie Axiome Γ in der Sprache L^S an, so daß gilt: $\mathfrak{A} = (A, \alpha) \models \Gamma$ impliziert, daß $\alpha(\dot{V})$ ein K-Vektorraum mit der Vektoraddition $\alpha(\dot{\oplus})$ und der skalaren Multiplikation $\alpha(\dot{\otimes})$ über dem Körper $(\alpha(\dot{S}), \alpha(\dot{+}), \alpha(-), \alpha(\dot{0}), \alpha(\dot{\times}), \alpha(\dot{1}))$ ist.

(16) Sei $S = \varnothing$ die leere Symbolmenge und seien $X \subseteq Y$ Mengen; dann sind $(X, \varnothing)$ und $(Y, \varnothing)$ S-Strukturen. Zeigen Sie: falls X unendlich ist, so existiert eine elementare Einbettung von $(X, \varnothing)$ nach $(Y, \varnothing)$. Was passiert, wenn X endlich ist?

(17) Sei S eine Symbolmenge und $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ eine S-Struktur. Eine Teilmenge $X \subseteq A$ heißt S-*definierbar*, wenn es eine S-Formel φ mit einer freien Variable x gibt, so daß für alle $a \in A$ gilt, daß $a \in X$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{a}{x}$.

Sei $S := \{\dot{0}, \dot{+}, \dot{\times}\}$ mit einem Konstantensymbol $\dot{0}$ und zwei binären Funktionssymbolen $\dot{+}$ und $\dot{\times}$. Betrachten Sie außerdem $S_0 := \varnothing$, $S_1 := \{\dot{0}\}$, $S_2 := \{\dot{0}, \dot{+}\}$ und $S_3 := S$, sowie $A := \mathbb{Z}$ und $\alpha(\dot{0}) = 0$, $\alpha(\dot{+}) := +$ und $\alpha(\dot{\times}) := \cdot$.

Entscheiden Sie für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{N}$, ob sie S_i-definierbar sind (für $i = 0, 1, 2, 3$; s. Tabelle unten) und geben Sie eine Begründung:

(a) $X_0 := \{0\}$,
(b) $X_1 := \{1\}$,
(c) $X_2 := \{z\,;\, z \text{ ist gerade}\}$, und
(d) $X_3 := \{1, -1\}$.

	S_0	S_1	S_2	S_3
X_0	???	???	???	???
X_1	???	???	???	???
X_2	???	???	???	???
X_3	???	???	???	???

(18) Sei S eine Symbolmenge, $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ und $\mathfrak{A}' = (A', \alpha')$ zwei S-Strukturen und $\pi : A \to A'$ eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$. Zeigen Sie daß die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind (das sogenannte *Tarski-Vaught-Kriterium* für elementare Einbettungen):

(a) die Abbildung π ist eine elementare Einbettung und
(b) für jede Formel φ mit freien Variablen $x_0, ..., x_n$ und $a_1, ..., a_n \in A$ gilt: falls es ein $a' \in A'$ gibt, so daß $\mathfrak{B} \models \varphi\frac{a'}{x_0}\frac{\pi(a_1)}{x_1}\cdots\frac{\pi(a_n)}{x_n}$, so gibt es ein $a \in A$, so daß $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{a}{x_0}\frac{a_1}{x_1}\cdots\frac{a_n}{x_n}$.