Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 3

Abgabe am Dienstag, 23. April 2017 am Anfang der Übung.

Wir erinnern wiederum an die Definition einer Formelableitung: eine endliche Folge $\varphi_1, ..., \varphi_n$ von Zeichenketten heißt *Formelableitung*, falls für alle $1 \leq i \leq n$ eine der folgenden Bedingungen gilt:

(F1) φ_i ist $t = t'$ für $t, t' \in T^S$,

(F2) φ_i ist $\dot{R}(t_1, ..., t_k)$ für $\dot{R} \in S_{\mathrm{R}}$, $\sigma(\dot{R}) = k$ und $t_1, ..., t_k \in T^S$,

(F3) es gibt ein $j < i$, so daß φ_i von der Form $\neg\varphi_j$ ist,

(F4) es gibt $j, j' < i$, so daß φ_i von der Form $(\varphi_j \wedge \varphi_{j'})$ ist,

(F5) es gibt $j, j' < i$, so daß φ_i von der Form $(\varphi_j \vee \varphi_{j'})$ ist,

(F6) es gibt $j, j' < i$, so daß φ_i von der Form $(\varphi_j \rightarrow \varphi_{j'})$ ist,

(F7) es gibt ein $j < i$ und ein $x \in V$, so daß φ_i von der Form $\exists x \varphi_j$ ist oder

(F8) es gibt ein $j < i$ und ein $x \in V$, so daß φ_i von der Form $\forall x \varphi_j$ ist.

Eine Formel heißt *positiv*, falls sie eine Formelableitung hat, in der Regeln (F3) und (F6) nicht verwendet werden; vgl. Aufgabe (7).

(11) Sei S eine Symbolmenge und φ eine positive S-Formel. Zeigen Sie, daß es eine Struktur und eine Belegung gibt, die φ erfüllen. (Überlegen Sie sich, daß diese Aussage für beliebige S-Formeln nicht gelten kann.)

(12) Das *Koinzidenzlemma* besagt:

> Seien S_1 und S_2 Symbolmengen mit $S := S_1 \cap S_2$, $\mathfrak{A}_1 = (A, \alpha_1)$ eine S_1-Struktur und $\mathfrak{A}_2 = (A, \alpha_2)$ eine S_2-Struktur mit derselben Menge A und seien β_1 und β_2 Belegungen. Setze $\mathfrak{I}_1 := (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ und $\mathfrak{I}_2 := (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$.
>
> (a) Sei t ein S-Term, so daß die Werte von α_1 und α_2 auf allen in t vorkommenden S-Symbolen sowie β_1 und β_2 auf allen in t vorkommenden Variablen übereinstimmen. Dann gilt $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.
>
> (b) Sei φ eine S-Formel, so daß die Werte von α_1 und α_2 auf allen in φ vorkommenden S-Symbolen und die Werte von β_1 und β_2 auf allen in φ frei vorkommenden Variablen übereinstimmen. Dann gilt $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

Beweisen Sie das Koinzidenzlemma durch Induktionen über Term- und Formelaufbau.

(13) Sei S eine Symbolmenge. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von S-Strukturen heißt *S-axiomatisierbar*, wenn es eine Menge Γ von S-Sätzen gibt, so daß für jede S-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt, daß $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Zeigen Sie, daß die folgenden Klassen für $S = S_{\mathrm{Gr}} = \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{0}\}$, die Symbolmenge der Gruppentheorie, axiomatisierbar sind:

(a) die Klasse aller abelschen Gruppen,

(b) die Klasse aller sechselementigen Gruppen, und

(c) die Klasse aller unendlichen Gruppen.

(14) Sei $S = S_{\mathrm{R}} = \{\dot{R}\}$ die Symbolmenge mit einem binären Relationssymbol. Wir sagen, daß ein Paar (X, E) eine *nichttriviale Äquivalenzstruktur* ist, falls E eine Äquivalenzrelation auf X ist, so daß alle Äquivalenzklassen unendlich sind.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Klasse aller nichttrivialen Äquivalenzstrukturen mit exakt n Äquivalenzklassen axiomatisierbar ist.

(b) Definieren Sie Relationen E_1, E_2 und E_3 auf $\mathbb{R}$, so daß $(\mathbb{R}, E_1)$, $(\mathbb{R}, E_2)$ und $(\mathbb{R}, E_3)$ nichttriviale Äquivalenzstrukturen mit exakt drei Äquivalenzklassen sind, die paarweise nicht-isomorph als S-Strukturen sind.