Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 2

Abgabe am Dienstag, 16. April 2017 am Anfang der Übung.

Wir erinnern an die Definition einer Formelableitung: eine endliche Folge $\varphi_1, ..., \varphi_n$ von Zeichenketten heißt *Formelableitung*, falls für alle $1 \leq i \leq n$ eine der folgenden Bedingungen gilt:

(F1) φ_i ist $t = t'$ für $t, t' \in T^S$,

(F2) φ_i ist $\dot{R}(t_1, ..., t_k)$ für $\dot{R} \in S_{\mathrm{R}}$, $\sigma(\dot{R}) = k$ und $t_1, ..., t_k \in T^S$,

(F3) es gibt ein $j < i$, so daß φ_i von der Form $\neg\varphi_j$ ist,

(F4) es gibt $j, j' < i$, so daß φ_i von der Form $(\varphi_j \wedge \varphi_{j'})$ ist,

(F5) es gibt $j, j' < i$, so daß φ_i von der Form $(\varphi_j \vee \varphi_{j'})$ ist,

(F6) es gibt $j, j' < i$, so daß φ_i von der Form $(\varphi_j \rightarrow \varphi_{j'})$ ist,

(F7) es gibt ein $j < i$ und ein $x \in V$, so daß φ_i von der Form $\exists x\varphi_j$ ist oder

(F8) es gibt ein $j < i$ und ein $x \in V$, so daß φ_i von der Form $\forall x\varphi_j$ ist.

(7) Sei S eine Symbolmenge. Eine Formel $\varphi \in L^S$ heißt *positiv*, falls die Symbole $\neg$ und $\rightarrow$ nicht in ihr auftreten. Wir wollen sagen, daß eine Formelableitung $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *positiv* ist, wenn für alle $1 \leq i \leq n$ gilt, daß eine der Bedingungen (F1), (F2), (F4), (F5), (F7) oder (F8) erfüllt ist. Zeigen Sie, daß eine Formel genau dann positiv ist, wenn es eine positive Formelableitung für diese Formel gibt.

(8) Sei S eine Symbolmenge und $Z := \{x\varphi\,;\, x \in V \text{ und } \varphi \in L^S \text{ und } x \notin \mathrm{frei}(\varphi)\}$. Eine endliche Folge von Zeichenketten $\zeta_1, ..., \zeta_n$ heiße eine *Z-Ableitung*, falls für alle $1 \leq i \leq n$ eine der folgenden Bedingungen gilt:

(Z1) ζ_i ist $xt = t'$ für $t, t' \in T^S$ mit $x \notin \mathrm{var}(t) \cup \mathrm{var}(t')$,

(Z2) ζ_i ist $x\dot{R}(t_1, ..., t_k)$ für $\dot{R} \in S_{\mathrm{R}}$, $\sigma(\dot{R}) = k$, $t_1, ..., t_k \in T^S$ und $x \notin \mathrm{var}(t_1) \cup ... \cup \mathrm{var}(t_n)$,

(Z3) es gibt ein $j < i$ mit $\zeta_j = x\varphi$ und $\zeta_i = x\neg\varphi$,

(Z4) es gibt $j, j' < i$ mit $\zeta_j = x\varphi$, $\zeta_{j'} = x\psi$ und $\zeta_i = x(\varphi \wedge \psi)$,

(Z5) es gibt $j, j' < i$ mit $\zeta_j = x\varphi$, $\zeta_{j'} = x\psi$ und $\zeta_i = x(\varphi \vee \psi)$,

(Z6) es gibt $j, j' < i$ mit $\zeta_j = x\varphi$, $\zeta_{j'} = x\psi$ und $\zeta_i = x(\varphi \rightarrow \psi)$,

(Z7) es gibt ein $j < i$ und ein $y \in V$ mit $\zeta_j = x\varphi$ und $\zeta_i = x\exists y\varphi$,

(Z8) es gibt ein $j < i$ und ein $y \in V$ mit $\zeta_j = x\varphi$ und $\zeta_i = x\forall y\varphi$,

(Z9) ζ_i ist $x\exists x\varphi$ für ein $\varphi \in L^S$,

(Z10) ζ_i ist $x\forall x\varphi$ für ein $\varphi \in L^S$.

Eine Zeichenkette heiße *Z-ableitbar*, wenn es eine Z-Ableitung für sie gibt. Zeigen Sie, daß eine Zeichenkette genau dann in Z ist, wenn sie Z-ableitbar ist.

(9) Sei S eine Symbolmenge. Wir definieren durch Rekursion auf dem Formelaufbau eine Funktion $\mathrm{qt} : L^S \to \mathbb{N}$ ("Quantorentiefe"):

$$\begin{aligned}
\mathrm{qt}(\varphi) &:= 0, \text{ falls } \varphi \text{ atomar ist,} \\
\mathrm{qt}(\varphi \wedge \psi) &:= \max\{\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)\}, \\
\mathrm{qt}(\varphi \vee \psi) &:= \max\{\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)\}, \\
\mathrm{qt}(\varphi \to \psi) &:= \max\{\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)\}, \\
\mathrm{qt}(\neg\varphi) &:= \mathrm{qt}(\varphi), \\
\mathrm{qt}(\exists x\varphi) &:= \mathrm{qt}(\varphi) + 1, \text{ und} \\
\mathrm{qt}(\forall x\varphi) &:= \mathrm{qt}(\varphi) + 1.
\end{aligned}$$

Wir setzen $Q_n^S := \{\varphi \in L^S\,;\, \mathrm{qt}(\varphi) \leq n\}$. Zeigen Sie, daß $L^S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n^S$ eine strikt aufsteigende Vereinigung von Mengen ist (also $Q_n^S \subsetneqq Q_{n+1}^S$) und daß das folgende Induktionsprinzip gilt:

Sei $Z \subseteq L^S$ eine Menge mit den folgenden Eigenschaften: (a) $Q_0^S \subseteq Z$ und (b) für jedes n gilt, falls $Q_n^S \subseteq Z$, so auch $Q_{n+1}^S \subseteq Z$. Dann ist $Z = L^S$.

(10) Sei $S = S_\mathrm{R} \cup S_\mathrm{F} \cup S_\mathrm{K}$ die Symbolmenge mit $S_\mathrm{R} := \{\dot{R}\}$, $S_\mathrm{F} := \{\dot{f}\}$ und $S_\mathrm{K} := \varnothing$. Wir setzen $\sigma(\dot{f}) = 2$ und $\sigma(\dot{R}) = 1$. Finden Sie eine Struktur (A, f, R) und sechs Belegungen, die die folgenden Formeln jeweils erfüllen oder nicht erfüllen:

(a) $\forall x \dot{f}(x, y) = x$,

(b) $\exists x \forall y \dot{f}(x, y) = y$ und

(c) $\exists x (\dot{R}(x) \wedge \forall y \dot{R}(\dot{f}(x, y)))$.