Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 12

Abgabe am Dienstag, 2. Juli 2019 am Anfang der Übung. Ab Übungblatt #5 geben Sie bitte in Zweiergruppen ab.

(49) *(Wiederholt von Übungsblatt # 11.)* Sei X eine Menge von nichtleeren Mengen. Eine Menge C heißt *Auswahlmenge für* X, falls für jedes $x \in X$, die Menge $C \cap x$ einelementig ist. Wir bezeichnen die Aussage "für jede Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen gibt es eine Auswahlmenge" als AC'.

Zeigen Sie, daß AC und AC' äquivalent sind.

Ist die zusätzliche Forderung "paarweise disjunkt" notwendig?

(50) Seien $(W, <)$ und $(W', <')$ zwei Wohlordnungen und sei  $\notin W'$. Wir definieren $W^* := W' \cup \{$$\}$ und definieren die folgende Abbildung $f : W \to W^*$ durch Rekursion:

$f(w) :=$
- w' falls $X := W'\backslash\operatorname{ran}(f\restriction I_w) \neq \varnothing$ und $w' = \min_{<'}(X)$ und
-  falls $X = \varnothing$.

Zeigen Sie:

(a) Die Mengen $I := \{w\,;\, f(w) \in W'\}$ und $I' := \operatorname{ran}(f)$ sind Anfangssegmente von W bzw. W'.

(b) Die Funktion $f\restriction I : I \to I'$ ist ein Isomorphismus.

(c) Höchstens eines der Anfangssegmente I und I' kann echt sein.

Folgern Sie daraus den *Fundamentalsatz über Wohlordnungen.*

(51) Der Satz von Cantor-Schröder-Bernstein besagt: falls $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$, dann $X \sim Y$. Zeigen Sie diesen Satz in den folgenden drei Schritten:

(a) Sei X eine Menge und $F : \wp(X) \to \wp(X)$ eine Funktion, die die Teilmengenrelation erhält, also für $A \subseteq B$ gilt $F(A) \subseteq F(B)$. Dann ist $H := \{x \in X\,;\, \exists A(x \in A \wedge A \subseteq F(A))\}$ ein Fixpunkt von F, also $H = F(H)$.

(b) (Banachscher Zerlegungssatz.) Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ beliebige Funktionen. Dann gibt es disjunkte Zerlegungen $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$, so daß $f[X_1] = Y_1$ und $g[Y_2] = Y_1$.

Hinweis. Betrachten Sie $F : \wp(X) \to \wp(X)$ definiert durch $F(S) := X \backslash g[Y \backslash f[S]]$ und wenden Sie Teil (a) an.

(c) Folgern Sie den Satz von Cantor-Schröder-Bernstein aus dem Banachschen Zerlegungssatz.

(52) Eine partielle Ordnung $(P, \leq)$ heißt *kettenvollständig*, wenn für jede Kette eine obere Schranke existiert: falls $C \subseteq P$, so daß $(C, \leq)$ eine totale Ordnung ist, so existiert $s \in P$, so daß für alle $c \in C$ gilt, daß $c \leq s$. Das *Zornsche Lemma* besagt: "Jede kettenvollständige partielle Ordnung besitzt ein maximales Element."

Beweisen Sie das Zornsche Lemma mit Hilfe des Auswahlaxioms.

(53) Seien λ und μ Limesordinalzahlen. Eine Teilmenge $C \subseteq \mu$ heißt *konfinal* oder *unbeschränkt*, falls für jedes $\alpha \in \mu$ ein $\gamma \in C$ existiert, so daß $\alpha < \gamma$. Eine Funktion $f : \lambda \to \mu$ heißt *konfinal* oder *unbeschränkt*, falls $\mathrm{ran}(f)$ konfinal ist. Die Identität von μ nach μ ist stets eine konfinale Funktion. Sei $\mathrm{cf}(\mu) := \min\{\alpha \leq \mu\,;$ es gibt eine konfinale Funktion $f : \alpha \to \mu\}$ die *Konfinalität von* μ.

Zeigen Sie:

(a) Die Konfinalität von μ ist stets eine Kardinalzahl und $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\mu)) = \mathrm{cf}(\mu)$.

(b) Es gibt Kardinalzahlen κ mit $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ (sogenannte *reguläre Kardinalzahlen*).

(c) Es gibt Kardinalzahlen κ mit $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ (sogenannte *singuläre Kardinalzahlen*).