Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 11

Abgabe am Dienstag, 25. Juni 2019 am Anfang der Übung. Ab Übungblatt #5 geben Sie bitte in Zweiergruppen ab.

(46) Beweisen Sie das *Prinzip der transfiniten Induktion*: Es sei Φ eine beliebige Formel mit einer freien Variable und den folgenden drei Eigenschaften:

(a) $\Phi(0)$,

(b) falls α eine Ordinalzahl ist und $\Phi(\alpha)$, so $\Phi(\alpha+1)$,

(c) falls λ eine Limesordinalzahl ist und für alle $\xi < \lambda$ gilt die Aussage $\Phi(\xi)$, so gilt $\Phi(\lambda)$.

Dann gilt $\Phi(\alpha)$ für alle Ordinalzahlen α.

(47) Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Ordinalzahlarithmetik:

(a) $\omega + 5 \neq 5 + \omega = \omega$,

(b) $\omega \cdot 7 \neq 7 \cdot \omega = \omega$,

(c) $\omega_1 + \omega \neq \omega + \omega_1 = \omega_1$,

(d) $(\omega + 1) \cdot \omega = \omega^2$,

(e) für alle α, β und γ gilt $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,

(f) für alle α, β und γ gilt $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ und

(g) für alle α, β und γ gilt $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.

(48) Eine Ordinalzahloperation F heißt *normal*, falls sie die folgenden zwei Eigenschaften hat:

(a) falls $\alpha < \beta$, so $F(\alpha) < F(\beta)$ und

(b) falls λ eine Limesordinalzahl ist, so ist $F(\lambda) = \bigcup\{F(\xi)\,;\,\xi \in \lambda\}$.

Eine Ordinalzahl γ heißt *Fixpunkt* von F, falls $F(\gamma) = \gamma$. Zeigen Sie, daß jede normale Ordinalzahloperation viele Fixpunkte hat. Können Sie "viele" präzise formulieren?

(49) Sei X eine Menge von nichtleeren Mengen. Eine Menge C heißt *Auswahlmenge für* X, falls für jedes $x \in X$, die Menge $C \cap x$ einelementig ist. Wir bezeichnen die Aussage "für jede Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen gibt es eine Auswahlmenge" als AC'.

Zeigen Sie, daß AC und AC' äquivalent sind.

Ist die zusätzliche Forderung "paarweise disjunkt" notwendig?