Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 1

Abgabe von Aufgaben (1) bis (3) am Dienstag, 9. April 2017 am Anfang der Übung. Aufgaben (4) bis (6) sind Präsenzaufgaben für die Übung.

Die Klausur der Vorlesung *Mathematische Logik & Mengenlehre* wird am 17. Juli 2019 stattfinden. Um zur Klausur zugelassen zu werden, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(a) schriftliche Bearbeitung von mindestens der Hälfte der Übungsaufgaben;

(b) regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnehme in der Übungsgruppe (aktive Teilnahme beinhaltet Vorrechnen an der Tafel).

---

(1) Wir nennen eine Struktur $\mathbf{G} = (V, E)$ einen *Graphen*, falls V eine Menge ist und E eine symmetrische binäre Relation auf V. Die Elemente von V nennen wir *Ecken*. Für $v \in V$ schreiben wir $\mathrm{NB}_{\mathbf{G}}(v) := \{w \in V\,;\,(v,w) \in E\}$ für die Menge der *Nachbarn* von v.

[*Hinweis.* Beachten Sie, daß eine Ecke ihr eigener Nachbar sein kann oder nicht. Eine Ecke, die ihr eigener Nachbar ist, heißt *reflexiv*; eine Ecke, die nicht ihr eigener Nachbar ist, heißt *irreflexiv*.]

Ein Graph heiße *fregesch*, falls für jede Eigenschaft von Ecken Φ eine Ecke v existiert, so daß

$$\mathrm{NB}_{\mathbf{G}}(v) = \{w \in V\,;\,\Phi(w)\}.$$

Zeigen Sie, daß es keine fregeschen Graphen gibt.

(2) Sei S eine Symbolmenge. Zeigen Sie durch Induktion über den Termaufbau, daß in jedem S-Term das Symbol) genau so oft auftritt wie das Symbol (.

(3) Wir konstruieren eine Sprache aus einem einzigen Symbol $\bullet$. Eine endliche Folge von diesen Symbolen heiße *Kette*. Eine Kette heißt *Basiskette*, falls Sie entweder zwei Elemente hat oder die Anzahl ihrer Elemente ein Vielfaches von elf ist. Wir definieren rekursiv den Begriff der *chinesischen Kette*: jede Basiskette ist chinesisch und falls s und t chinesische Ketten sind, so ist auch st eine chinesische Kette (wobei Hintereinanderschreiben die Verkettung zweier Folgen bezeichnet).

(a) Geben Sie zwei Beispiele für chinesische Ketten, die keine Basisketten sind.
(b) Geben Sie zwei Beispiele für nichtchinesische Ketten.
(c) Beschreiben Sie die Menge der chinesischen Ketten.

(4) Wir konstruieren eine bildliche Sprache aus Geradensegmenten im $\mathbb{R}^2$. Sei $G_1 := \{\ell\,;\, \ell$ ist ein Geradensegment im $\mathbb{R}^2$ mit Länge $1\}$. Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L}_1$, deren Zeichenketten aus endlichen Folgen von Elementen von G_1 bestehen. Falls ζ eine Zeichenkette in $\mathcal{L}_1$, so bezeichnen wir die Teilmenge $B_\zeta := \bigcup\{\ell\,;\, \ell$ taucht in ζ auf$\}$ als *Bild von* ζ.

Wir definieren nun rekursiv den Begriff der *Zeichnungsprotokolls*: jedes Element von G_1 ist ein Zeichnungsprotokoll; falls ζ ein Zeichnungsprotokoll ist und $\ell \in G_1$, so ist $\zeta\ell$ ein Zeichnungsprotokoll, falls ℓ und das Bild von ζ höchstens zwei Punkte gemeinsam haben und ℓ mindestens einen Endpunkt eines Geradensegments ℓ', welches in ζ vorkommt, enthält.

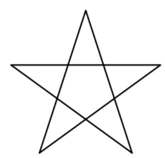
Falls ζ ein Zeichnungsprotokoll ist, so nennen wir das Bild von ζ eine *Zeichnung*.

(a) Jede Zeichnung hat ein Zeichnungsprotokoll. Erläutern sie, warum dies nicht notwendigerweise eindeutig ist.

(b) Beweisen Sie, daß alle Zeichnungen wegzusammenhängend sind.

(c) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n das reguläre n-Eck mit Kantenlänge eins eine Zeichnung ist.

(d) Beweisen Sie, daß das Pentagramm



mit Schenkellänge eins keine Zeichnung ist.

(e) Wie sieht es aus, wenn Sie das Pentagramm mit nicht vorgegebener Schenkellänge betrachten?

(5) Sei $S = S_\mathrm{R} \cup S_\mathrm{F} \cup S_\mathrm{K}$ die Symbolmenge mit $S_\mathrm{R} := \{\dot{R}\}$, $S_\mathrm{F} := \{\dot{f}\}$ und $S_\mathrm{K} := \{\dot{c}\}$. Sei σ die Signatur mit $\sigma(\dot{R}) = \sigma(\dot{f}) = 2$. In der folgenden Liste von Zeichenketten, identifizieren Sie, welche Zeichenketten S-Terme und S-Formeln sind. Unter den Zeichenketten, die keine S-Terme oder S-Formeln sind, identifizieren Sie diejenigen, die *informelle Schreibweisen* von S-Termen und S-Formeln sind und geben Sie an, welchem S-Term oder welcher S-Formel sie entsprechen. Im folgenden sind x, y, z Variablen in V.

xy	$x(y)$	$\dot{R}(x,y)$	$\dot{f}(x,z)$	$(\dot{R}(x,z))$	$(\dot{R}(x,z) \wedge \dot{R}(y,y))$
$x\dot{R}y$	$\dot{R}(x,z) \wedge \dot{R}(y,y)$	$\dot{f}(\dot{f}(x,x),x)$	$\dot{R}(\dot{f}(x,y),\dot{c})$	$c \wedge x$	$\dot{f}(x,c)$
$\neg(\dot{R}(x,y))$	$x = y$	$\exists x(x = x)$	$\forall xx = x$	$\dot{f}\dot{R}\dot{c}$	$(())$
$(\dot{f}(\dot{c},\dot{c}))$	$\neg(x = y \wedge \dot{R}(x,y))$	$\dot{f}(\dot{f}(\dot{c},x),y)$	$\dot{f}(\dot{c},x,y)$	$\dot{R}\dot{f}xy\dot{c}$	$(\dot{R}(x,y) \wedge z = \dot{c}$

(6) Sei $S = S_\mathrm{R} \cup S_\mathrm{F} \cup S_\mathrm{K}$ die Symbolmenge mit $S_\mathrm{R} := \varnothing$, $S_\mathrm{F} := \{\dot{m}, \dot{a}\}$ und $S_\mathrm{K} := \{\dot{e}\}$. Sei σ die Signatur mit $\sigma(\dot{m}) = \sigma(\dot{a}) = 2$. Interpretieren Sie $\dot{m}$ als Multiplikation, $\dot{a}$ als Addition und $\dot{e}$ als 1 und drücken Sie den informellen Term $x^2 + 2x + 1$ als S-Term aus. Geben Sie eine Ableitung für den Term im Termkalkül.