Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung: Algebraische Strukturen
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe

Musterklausur

Name:

Matrikelnummer:

Die Klausur wird 105 Minuten dauern (von 14:15 bis 16:00).

Es gibt insgesamt 100 Punkte in der Klausur; 50 Punkte sind ausreichend, um die Klausur zu bestehen.

Frage 1.	(30 Punkte)	**Frage 3.**	(15 Punkte)
Frage 2.	(35 Punkte)	**Frage 4.**	(20 Punkte)
		GESAMT	(100 Punkte)
		NOTE	

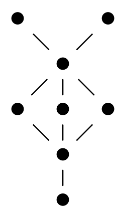
Frage 1. *Hasse-Diagramme* (30 Punkte).

Wir geben drei endliche partielle Ordnungen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ durch ihre Hasse-Diagramme an. Zeichnen Sie die partiellen Ordnungen

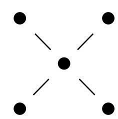
(i) $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$,

(ii) $\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$ und

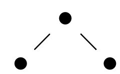
(iii) $\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}$.



A



B



C

Frage 2. *Verbände & Verbandstrukturen* (35 Punkte).

In der Vorlesung hatten wir eine partielle Ordnung $(X, \leq)$ einen *Verband* genannt, falls für je zwei Elemente $x, y \in X$ das Infimum und Supremum von $\{x, y\}$ existieren.

(i) Formulieren Sie das *Verbindungslemma* für Verbände (kein Beweis nötig).

Eine algebraische Struktur $(X, \wedge, \vee)$ mit zwei zweistelligen Operationen wurde *Verbandsstruktur* genannt, wenn Sie acht Gleichungen erfüllt, unter denen die folgenden drei sind:

$$x \wedge y = y \wedge x, \tag{K}$$

$$x \vee x = x \text{ und} \tag{I}$$

$$x \wedge (x \vee y) = x. \tag{A}$$

(ii) Geben Sie die anderen fünf Gleichungen an, die die Definition des algebraischen Begriffs *Verbandsstruktur* ausmachen.

Betrachten Sie die algebraische Struktur auf $X := \{a, b, c, d, e, f, g\}$, welche durch die folgenden Verknüpfungstafeln gegeben ist:

$\wedge$	a	b	c	d	e	f	g
a	a	b	c	d	e	f	g
b	b	b	e	e	e	f	g
c	c	e	c	e	e	f	g
d	d	e	e	d	e	f	g
e	e	e	e	e	e	f	g
f	f	f	f	f	f	f	g
g	g	g	g	g	g	g	g

$\vee$	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	b	b	b
c	a	a	c	a	c	c	c
d	a	a	a	d	d	d	d
e	a	b	c	d	e	e	e
f	a	b	c	d	e	f	e
g	a	b	c	d	e	e	g

(iii) Gelten die Gleichungen (K), (I) und (A) in $(X, \wedge, \vee)$? Geben Sie für jede der drei Gleichungen entweder eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

Frage 3. *Unendliche lineare Ordnungen* (15 Punkte).

Betrachten Sie die Menge der geraden Zahlen $\mathbb{G} := \{2, 4, 6, \ldots\}$ und die Menge der ungeraden Zahlen $\mathbb{U} := \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. Es gilt $\mathbb{N} = \mathbb{G} \cup \mathbb{U}$. Wir bezeichnen die übliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ durch $\leq$. Definieren Sie die folgende Relation auf $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n \leq^* m \text{ genau dann, wenn } & n, m \in \mathbb{G} \text{ und } n \leq m, \\ & n, m \in \mathbb{U} \text{ und } n \leq m \text{ oder} \\ & n \in \mathbb{G} \text{ und } m \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(i) $(\mathbb{N}, \leq^*)$ ist eine lineare Ordnung,

(ii) $\mathbb{U}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, welche kein Supremum bezüglich $\leq^*$ hat und

(iii) $\mathbb{G}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, welche ein Supremum bezüglich $\leq^*$ hat.

Frage 4. *Knaster-Tarski* (20 Punkte).

In der Vorlesung hatten wir verschiedene Konsequenzen des Satzes von Knaster & Tarski betrachtet, unter andere,m den *Banachschen Zerlegungssatz* und den *Satz von Schröder-Bernstein.*

> *Satz von Schröder-Bernstein.* Falls X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Injektionen sind, so existiert eine Bijektion zwischen X und Y.

(i) Formulieren Sie präzise den Banachschen Zerlegungssatz. (Kein Beweis erforderlich.)

(ii) Beweisen Sie den Satz von Schröder-Bernstein (s.o.) aus dem Banachschen Zerlegungssatz.