

(H24)

Behauptung: Das Produkt distributiver Verbands ist wieder distributiv.

Beweis: Es seien G_1, G_2 distributive Verbands.

Die Operationen $\wedge$ und $\vee$ seien auf $G_1 \otimes G_2$ wie folgt definiert:

$$(g_1, g_2) \wedge (g_1', g_2') =$$

$$(g_1 \wedge g_1', g_2 \wedge g_2')$$

$$(g_1, g_2) \vee (g_1', g_2') =$$

$$(g_1 \vee g_1', g_2 \vee g_2') \quad (\text{siehe Vorlesung}).$$

Ebenfalls wurde bereits gezeigt, dass das Produktverband $G_1 \otimes G_2$ wieder einen Verband ergibt.

Um zu beweisen, dass $G_1 \otimes G_2$ ebenfalls distributiv ist, müssen wir zeigen, dass die Distributivgesetze gelten.

$$\begin{aligned} (1) \quad & (g_1, g_2) \vee ((g_1', g_2') \wedge (g_1', g_2'')) = \\ & (g_1, g_2) \vee (g_1' \wedge g_1'', g_2' \wedge g_2'') = \\ & (g_1 \vee (g_1' \wedge g_1''), g_2 \vee (g_2' \wedge g_2'')) \stackrel{* \text{ Distributivität von } G_1, G_2}{=} \\ & ((g_1 \vee g_1') \wedge (g_1 \vee g_1''), (g_2 \vee g_2') \wedge (g_2 \vee g_2'')) = \\ & (g_1 \vee g_1', g_2 \vee g_2') \wedge (g_1 \vee g_1'', g_2 \vee g_2'') = \\ & ((g_1, g_2) \vee (g_1', g_2')) \wedge ((g_1, g_2) \vee (g_1', g_2'')) \quad \checkmark \end{aligned}$$

(2) Selbiges kann auch hier gezeigt werden. Der Schlüssel besteht darin die Distributivität komponentenweise fortzusetzen. Da das tatsächlich nahezu gleich (1) ist, werde (2) nicht noch einmal ausführlich aufgeführt. ✓

(H25) Wir haben in der VL gezeigt, dass (1) und (2) äquivalent sind.

Jetzt nehmen wir uns (1) und (3):

- (i) Angenommen f ist ordnungserhaltend.
Daraus resultiert falls $a \leq b$ so $f(a) \leq f(b)$. (*)

Anmerkung:
 $b \leq a$

Wir wissen:

$$\begin{array}{l} a \wedge b \leq b \\ a \wedge b \leq a \end{array} \quad \} \quad \begin{array}{l} f(a \wedge b) \leq f(a) \quad (**) \\ f(a \wedge b) \leq f(b) \end{array}$$

Nach Def. ist $f(a) \wedge f(b)$ die gr. untere Schranke von $f(a)$ und $f(b)$ und nach (**) ist $f(a \wedge b)$ eine obere Schranke.

Daraus folgt $f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$ ✓

- (ii) $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$ z.z. $f(a) \leq f(b)$
 $f(a) = f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b) \leq f(b)$

Da (1) zu (2) und (1) zu (3) äquivalent ist, ist somit auch (2) zu (3) ✓ äquivalent.

(H26)

- (1) ist vollständig, da wir in der VL bereits bewiesen haben, dass die Potenzmenge einer jeden Menge eine gr. untere und kleinste obere Schranke besitzt ✓

- (3) ist vollständig, da $-\infty$ und ∞ sowohl die größte untere und kleinste obere Schranke darstellen. $\mathbb{R}$ wurde so konstruiert, dass es vollständig ist ✓

- (2) ist unvollständig (?), da zum Beispiel die Teilmenge $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ keine kleinste obere Schranke hat ✓