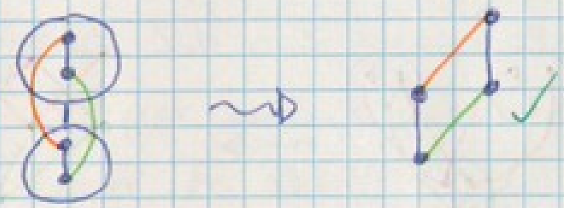
Blatt 7

(19) Seien $P_1 := \mathbb{2}$

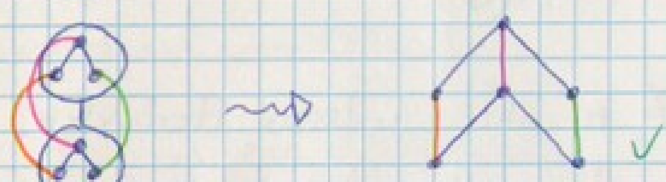
$P_2 := \overline{\mathbb{2}} \oplus \mathbb{1}$

und $P_3 := \mathbb{1} \oplus \overline{\mathbb{2}}$.

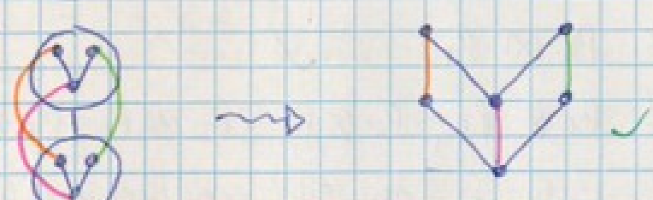
$P_1 \otimes P_1$



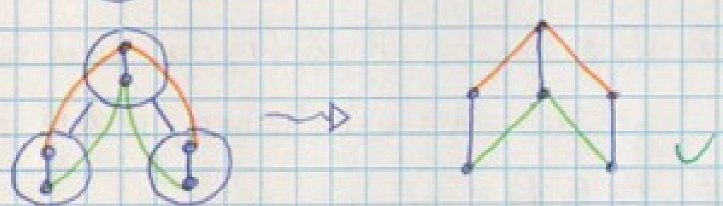
$P_1 \otimes P_2$



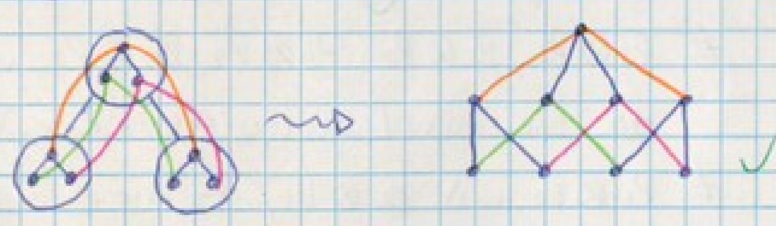
$P_1 \otimes P_3$



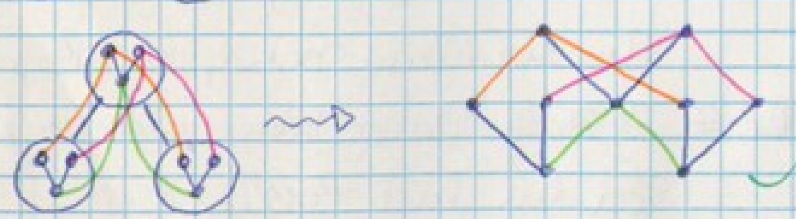
$P_2 \otimes P_1$



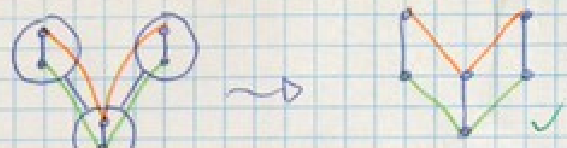
$P_2 \otimes P_2$



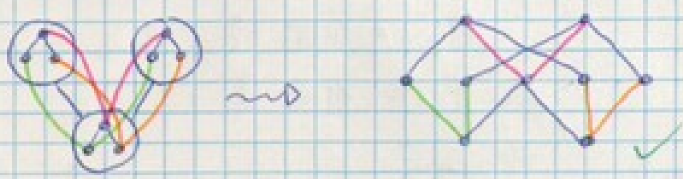
$P_2 \otimes P_3$



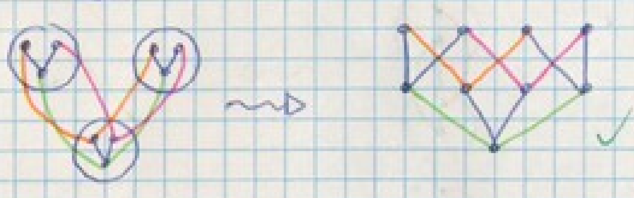
$P_3 \otimes P_1$



$P_3 \otimes P_2$



$P_3 \otimes P_3$



$P_1 \otimes P_1 \ncong$ zu allen anderen Produkten, da diese alle mehr als 4 Elemente haben. (Δ)

$P_1 \otimes P_2 \cong P_2 \otimes P_1$ (+)

$\ncong P_1 \otimes P_1$, $P_2 \otimes P_2$, $P_2 \otimes P_3$, $P_3 \otimes P_2$ und $P_3 \otimes P_3$, da sie mehr/weniger Elemente haben. (Δ)

$\ncong P_1 \otimes P_3$ und $P_3 \otimes P_1$, da diese beiden kein größtes Element haben, $P_1 \otimes P_2$ jedoch schon.

$P_1 \otimes P_3 \cong P_3 \otimes P_1$ (+)

$\ncong P_1 \otimes P_1$, $P_2 \otimes P_2$, $P_2 \otimes P_3$, $P_3 \otimes P_2$ und $P_3 \otimes P_3$, da sie mehr/weniger Elemente haben. (Δ)

$\ncong P_1 \otimes P_2$ und $P_2 \otimes P_1$, da diese beiden kein kleinstes Element haben, $P_1 \otimes P_3$ jedoch schon.

$P_2 \otimes P_1 \cong P_1 \otimes P_2$. Daher kann die Argumentation analog zu dem Fall $P_1 \otimes P_2$ hierauf übertragen werden. Alle anderen Produkte sind also nicht isomorph zu $P_2 \otimes P_1$.

$P_2 \otimes P_2 \ncong$ zu allen anderen Produkten. Sie haben entweder zu wenig Elemente oder aber kein größtes Element. (Δ)

$P_2 \otimes P_3 \cong P_3 \otimes P_2$

$\ncong$ zu allen anderen Produkten. Sie haben nämlich weniger Elemente oder aber kein größtes/kleinstes Element.

$P_3 \otimes P_3 \not\cong$ zu allen anderen Produkten. Sie haben nämlich ~~zu~~ weniger Elemente oder aber kein kleinstes Element. ✓

$P_3 \otimes P_1$ ist analog zu $P_1 \otimes P_3$, da $P_1 \otimes P_3 \cong P_3 \otimes P_1$ ✓

$P_3 \otimes P_2$ ist analog zu $P_2 \otimes P_3$, da $P_2 \otimes P_3 \cong P_3 \otimes P_2$. ✓

(*) sind isomorph nach Satz aus VL vom 14.05.18 ✓

(20) Sei K ein Körper und V ein beliebiger K-Vektorraum. Es sei $L := \{U \subseteq V : U$ ist ein Untervektorraum von $V\}$.

Beh: $(L, \subseteq)$ ist ein Verband.

Bew: Seien $X, Y \in L$ beliebig.
zzg: L hat eine kleinste obere und eine größte untere Schranke

1. Fall: $X \cap Y = \emptyset$ (disjunkt) ← Dieser Fall tritt nie ein.
Dann ist $X \cup Y$ die kleinste obere Schranke
↖ Das ist nicht notwendigerweise ein VR
und $X \cap Y$ die größte untere Schranke.

2. Fall: $X = Y$
Dann ist $X = Y$ sowohl die kleinste obere Schranke als auch größte untere Schranke. (✓)

3. Fall: $X \overset{\text{oBdA}}{\subseteq} Y$
Dann wäre Y die kleinste obere Schranke von X und Y und es wäre X die größte untere Schranke von X und Y. (✓)

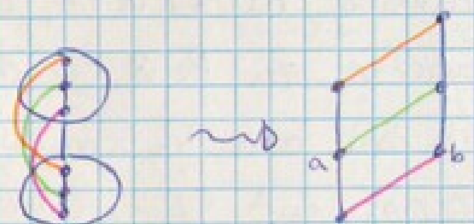
4. Fall: Sonst.
Dann wäre $X \cup Y$ (s.o.) die kleinste obere Schranke und $X \cap Y$ die größte ~~obere~~ untere Schranke.

Welche Eigenschaften eines Verbandes habt ihr nicht nachgeprüft?

(21) Seien $P_1 := \mathfrak{D}$ und $P_2 := \mathfrak{B}$ lineare Ordnungen.

(a) Dann gilt:

$$P_1 \otimes P_2 = \mathfrak{D} \otimes \mathfrak{B} = P_3$$



Das Produkt ($\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{B} =: P_3$) ist nicht linear.
Denn beispielsweise die Elemente a und b in P_3 stehen in keiner Relation zueinander, (nicht einmal über Transitivität).

(b) Aufgabenteil (b) ist falsch.
Es gibt keine Verbände P, Q, sodass das Produkt $P \otimes Q$ kein Verband ist.

Aufgabe (20)

Behauptung. Für K einen Körper und V einen beliebigen K-Vektorraum ist

$$(L := \{U \subseteq V | U \text{ ist ein Untervektorraum von } V\}, \subseteq)$$

ein Verband.

Beweis. Wir müssen zeigen:

(1) $(L, \subseteq)$ ist eine partielle Ordnung

(2) Für alle $U, W \in L$ gibt es die kleinste obere und die größte untere Schranke

zu (1): Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie folgen sofort aus den Eigenschaften der Teilmengenrelation.
zu (2): Seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume.
Beh: Dann ist $U \cap W$ die größte untere Schranke und
$U + W := \{+w | u \in U, w \in W\}$ die kleinste obere Schranke von U und W.

Beweis. Aus linearer Algebra ist bekannt, dass $U \cap W$ und $U + W$ wieder Untervektorräume von V sind, $U \cap W \subseteq U, W$ sowie $U, W \subseteq U + W$ folgen sofort aus der jeweiligen Definition.
Wir müssen also nur zeigen, dass $U \cap W$ der größte Untervektorraum ist, der sowohl Teilmenge von U als auch von W ist, was aus der Definition des Schnitts folgt, und $U + W$ der kleinste, der sowohl U als auch W enthält.
Sei dafür X ein Vektorraum, der U und W enthält. Wir müssen zeigen, dass auch $U + W \subseteq X$ gilt. Sei dafür $u + w \in U + W$ beliebig. Da $U, W \subseteq X$ gilt, folgt auch $u, w \in X$. Da X ein Vektorraum ist, folgt auch $u + w \in X$ und da $u + w$ beliebig gewählt war, folgt $U + W \subseteq X$. □

□