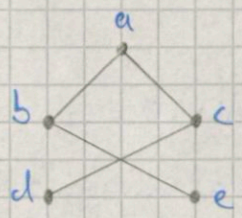
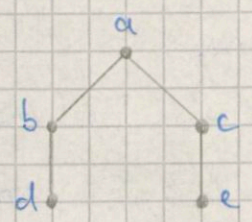
Aufgabe 14

Wir benennen wie folgt:

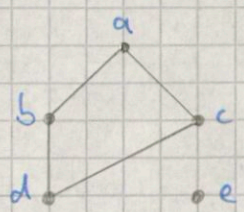
I



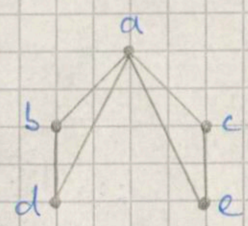
II



III



IV



Hasse-Diagramm	kleinstes Element	größtes Element	minimale Elemente	maximale Elemente
I	×	a	d, e	a
II	×	a	d, e	a
III	×	×	d, e	a, e
IV	×	a	d, e	a

× steht für: es gibt keine.

Die Diagramme I, II und IV sind ordnungsisomorph.

Das zeigen die folgenden Abbildungen:

Sei $X := \{a, b, c, d, e\}$.

$\mathrm{I} \cong \mathrm{II}$: $f_1: X \longrightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} a & \mapsto & a \\ b & \mapsto & c \\ c & \mapsto & b \\ d & \mapsto & d \\ e & \mapsto & e \end{array}$$

$\mathrm{II} \cong \mathrm{IV}$: $f_2: X \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} a & \mapsto & a \\ b & \mapsto & b \\ c & \mapsto & c \\ d & \mapsto & d \\ e & \mapsto & e \end{array}$$

Und daraus folg bereits $\mathrm{I} \cong \mathrm{IV}$.

Aufgabe 15

Seien $X \subseteq Y$ Mengen.

Behauptung

Es gibt eine Teilmenge $Z \subseteq \mathcal{P}(Y)$ mit $\emptyset \in Z$ und $Y \in Z$, sodass $(Z, \subseteq)$ und $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ordnungsisomorph sind.

Beweis

Definiere $\quad Z := \left(\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}\right) \cup \{Y\}$ und weiter

$$\varphi : Z \to \mathcal{P}(X),$$
$$A \mapsto \begin{cases} A, & \text{falls } A \neq Y \\ X, & \text{falls } A = Y. \end{cases}$$

Dann ist $\psi : \mathcal{P}(X) \to Z$,

$$A \mapsto \begin{cases} A, & \text{falls } A \neq X \\ Y, & \text{falls } A = X \end{cases}$$

die Umkehrabbildung von φ, also ist φ bijektiv.

Es bleibt zu zeigen, dass φ ordnungserhaltend ist:

1. Fall. $A \neq Y \neq B$

Dann ist $A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ wahr, da φ auf $Z \setminus \{Y\}$ der Identität entspricht.

2. Fall $A = Y$

Dann folgt wegen $A \subseteq B$ auch $B = A = Y$. und es gilt

$$A \subseteq B \Leftrightarrow Y \subseteq Y \Leftrightarrow \varphi(Y) \subseteq \varphi(Y) \Leftrightarrow X \subseteq X$$

3. Fall $B = Y \neq A$.

Hier ist

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq Y \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(Y) \Leftrightarrow A \subseteq X.$$

Also ist φ ordnungserhaltend.

$\square$