Algebraische Strukturen
Blatt 4

(11) Seien $Y \subseteq X$ Mengen und $\leq$ eine partielle Ordnung auf X. Sei $\leq_Y = \{(x,y) ; x, y \in Y$ und $x \leq y\}$ und

$id : Y \to X$ die Identität. Sei $R \subseteq Y^2$ eine bin. Relation auf Y.
$\quad y \mapsto id(y) = y$

Beh.: Die Identität id ist ordnungserhaltend zwischen (Y, R) und $(X, \leq)$ genau dann, wenn $R = \leq_Y$.

Bew.:

„$\Rightarrow$" Die Identität sei ordnungserhaltend zwischen (Y, R) und $(X, \leq)$.

$\Rightarrow \forall_{y, y' \in Y} : \; y R y' \Leftrightarrow id(y) \leq id(y')$

$\overset{\text{Def. id}}{\Rightarrow} \forall y, y' \in Y : \; y R y' \Leftrightarrow y \leq y'$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad R = \leq_Y$

(*) da $y, y' \in Y$ und $y \leq y'$ (also $(y, y') \in \leq_Y$)

„$\Leftarrow$" Es gelte $R = \leq_Y$.

Seien $y, y' \in Y$. Es gilt:

$y R y' \Leftrightarrow y \leq_Y y' \overset{\text{Def. } \leq_Y}{\Leftrightarrow} y \leq y' \overset{\text{Def. id}}{\Leftrightarrow} id(y) \leq id(y')$

$\Rightarrow$ Die Identität ist ordnungserhaltend zwischen (Y, R) und $(X, \leq)$.

$\square$

genau!

Hausaufgaben Übungsblatt 4

Vertiefung: Algebraische Strukturen

(12)

Sei $X := \{a,b,c,d\}$ eine vierelementige Menge. R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 sind binäre Relationen auf X.

$R_1 := \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (c,c), (d,d)\}$

R_1 ist reflexiv auf X, weil für alle $x \in X$ gilt $(x,x) \in R_1$.

Es sind $(a,a), (b,b), (c,c), (d,d) \in R_1$ ✓

R_1 ist transitiv auf X, denn für alle $x,y,z \in X$ gilt falls xR_1y und yR_1z, so ist xR_1z

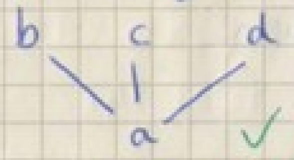
$$(a,a) \wedge (a,a) \Rightarrow (a,a) \in R_1$$
$$(a,a) \wedge (a,b) \Rightarrow (a,b) \in R_1$$
$$(a,a) \wedge (a,c) \Rightarrow (a,c) \in R_1$$
$$(a,a) \wedge (a,d) \Rightarrow (a,d) \in R_1$$
$$(a,b) \wedge (b,b) \Rightarrow (a,b) \in R_1$$
$$(a,c) \wedge (c,c) \Rightarrow (a,c) \in R_1$$
$$(a,d) \wedge (d,d) \Rightarrow (a,d) \in R_1$$
$$(b,b) \wedge (b,b) \Rightarrow (b,b) \in R_1$$
$$(c,c) \wedge (c,c) \Rightarrow (c,c) \in R_1$$
$$(d,d) \wedge (d,d) \Rightarrow (d,d) \in R_1$$ ✓

R_1 ist antisymmetrisch auf X, weil für alle $x,y \in X$ gilt: falls $xR_1y \wedge yR_1x$, so $x = y$

Es sind $(a,b), (a,c), (a,d) \in R_1$, aber $(b,a), (c,a), (d,a) \notin R_1$. ✓

Aufgrund dessen, dass R_1 reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist, ist (X, R_1) eine partielle Ordnung. ✓

Hasse-Diagramm



$R_2 := \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,c), (c,c), (d,d)\}$

R_2 ist reflexiv auf X, weil für alle $x \in X$ gilt $(x,x) \in R_2$

Es sind $(a,a), (b,b), (c,c), (d,d) \in R_2$. ✓

R_2 ist transitiv auf X, denn für alle $x,y,z \in X$ gilt

falls $x R_2 y$ und $y R_2 z$, so $x R_2 z$

Der Beweis ist der gleiche wie auf Seite 1 zur Transitivität von R_1. Zu zeigen bleibt nur noch:

$(a,b) \wedge (b,c) \Rightarrow (a,c) \in R_2$

$(b,b) \wedge (b,c) \Rightarrow (b,c) \in R_2$

$(b,c) \wedge (c,c) \Rightarrow (b,c) \in R_2$ ✓

R_2 ist antisymmetrisch auf X, weil für alle $x,y \in X$ gilt:

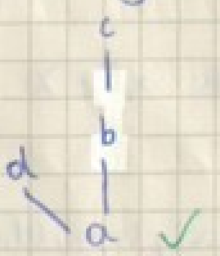
falls $x R_2 y$ und $y R_2 x$, so $x = y$

Es sind $(a,b), (a,c), (a,d), (b,c) \in R_2$, aber

$(b,a), (c,a), (d,a), (c,b) \notin R_2$. ✓

Somit ist R_2 reflexiv, transitiv und antisymmetrisch und damit ist (X, R_2) eine partielle Ordnung. ✓

Hasse-Diagramm:



$R_3 := \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (c,a), (c,c), (d,d)\}$

R_3 ist reflexiv auf X, weil für alle $x \in X$ gilt $(x,x) \in R_3$

Es sind $(a,a), (b,b), (c,c), (d,d) \in R_3$ ✓

R_3 ist nicht transitiv auf X, denn

$(c,a) \wedge (a,b) \Rightarrow (c,b) \notin R_3$

$(c,a) \wedge (a,d) \Rightarrow (c,d) \notin R_3$ ✓

R_3 ist nicht antisymmetrisch auf X, denn $(a,c) \in R_3$ und $(c,a) \in R_3$ ✓

$R_4 := \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (c,c), (d,c)\}$

R_4 ist nicht reflexiv auf X, denn $(b,b) \notin R_4$ und $(d,d) \notin R_4$. ✓

R_4 ist transitiv auf X, denn für alle $x,y,z \in X$ gilt falls $x R_4 y$ und $y R_4 z$, so $x R_4 z$

$(a,a) \wedge (a,b) \Rightarrow (a,b) \in R_4$

$(a,a) \wedge (a,c) \Rightarrow (a,c) \in R_4$

$(a,a) \wedge (a,d) \Rightarrow (a,d) \in R_4$

$(a,b) \wedge (b,c) \Rightarrow (a,c) \in R_4$

$(a,c) \wedge (c,c) \Rightarrow (a,c) \in R_4$

$(a,d) \wedge (d,c) \Rightarrow (a,c) \in R_4$

$(b,c) \wedge (c,c) \Rightarrow (b,c) \in R_4$

$(d,c) \wedge (c,c) \Rightarrow (d,c) \in R_4$ ✓

R_4 ist antisymmetrisch auf X, weil für alle $x,y \in X$ gilt:
falls $x R_4 y$ und $y R_4 x$, so $x = y$
Es sind $(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (d,c) \in R_4$, aber
$(b,a), (c,a), (d,a), (c,b), (c,d) \notin R_4$. ✓

$R_5 := \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,c), (b,d), (c,c), (c,d), (d,d)\}$

R_5 ist reflexiv auf X, weil für alle $x \in X$ gilt $(x,x) \in R_5$
Es ist $(a,a), (b,b), (c,c), (d,d) \in R_5$ ✓

R_5 ist transitiv auf X, denn für alle $x,y,z \in X$ gilt:
falls $x R_5 y$ und $y R_5 z$, so $x R_5 z$
Der Beweis ist der gleiche wie auf Seite 1 zur Transitivität von R_1. Es bleibt noch zu zeigen

$$(b,c) \wedge (c,c) \Rightarrow (b,c) \in R_5$$
$$(b,c) \wedge (c,d) \Rightarrow (b,d) \in R_5$$
$$(b,d) \wedge (d,d) \Rightarrow (b,d) \in R_5$$
$$(c,d) \wedge (d,d) \Rightarrow (c,d) \in R_5 \quad ✓$$

✗ siehe S. 5!

R_5 ist antisymmetrisch auf X, weil für alle $x,y \in X$ gilt:
falls $x R_5 y$ und $y R_5 x$, so $x = y$.
Es sind $(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d) \in R_5$, aber
$(b,a), (c,a), (d,a), (c,b), (d,b), (d,c) \notin R_5$. ✓

Da R_5 reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist, ist (X, R_5) eine partielle Ordnung. ✓

Hesse-Diagramm

✓

Hervorragend!

* Fortsetzung S. 4

$(b,b) \wedge (b,d) \Rightarrow (b,d) \in R_5$

$(a,b) \wedge (b,d) \Rightarrow (a,d) \in R_5$

$(a,b) \wedge (b,c) \Rightarrow (a,c) \in R_5$

$(a,c) \wedge (c,d) \Rightarrow (a,d) \in R_5$ ✓