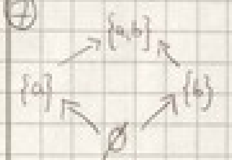
Blatt 3 – Vertiefung Algebraische Strukturen

7



∩	{a,b}	{a}	{b}	∅
{a,b}	{a,b}	{a}	{b}	∅
{a}	{a}	{a}	∅	∅
{b}	{b}	∅	{b}	∅
∅	∅	∅	∅	∅

∧	1	L	R	0
1	1	L	R	0
L	L	L	0	0
R	R	0	R	0
0	0	0	0	0

∪	{a,b}	{a}	{b}	∅
{a,b}	{a,b}	{a,b}	{a,b}	{a,b}
{a}	{a,b}	{a}	{a,b}	{a}
{b}	{a,b}	{a,b}	{b}	{b}
∅	{a,b}	{a}	{b}	∅

∨	1	L	R	0
1	1	1	1	1
L	1	L	1	L
R	1	1	R	R
0	1	L	R	0

$\overline{}$	
{a,b}	∅
{a}	{b}
{b}	{a}
∅	{a,b}

¬	
1	0
L	R
R	L
0	1

sehr schön!

($M_1 = \{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$)

Stellt man die Verknüpfungstafeln der Potenzmengenalgebra den Wahrheitstafeln der Algebra M_2 gegenüber, so kann eine Struktur-gleichheit erkannt werden ($\cap$ entspricht $\wedge$, $\cup$ entspricht $\vee$, $\overline{}$ entspricht $\neg$).

Genauer gilt mit folgender Bijektion φ:
$$\begin{aligned} M_1 &\longrightarrow M_2 \\ \{a,b\} &\longmapsto 1 \\ \{a\} &\longmapsto L \\ \{b\} &\longmapsto R \\ \emptyset &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

dass $(M_1, \cap)$ und $(M_2, \wedge)$ isomorph sind.
Ebenso sind $(M_1, \cup)$ und $(M_2, \vee)$ sowie $(M_1, \overline{})$ und $(M_2, \neg)$ ✓
isomorph.

(8) Beh.: Es gilt: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Bew.:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	L	L	R	0	R	R	1
1	R	R	L	0	L	L	1
1	0	0	1	0	1	1	1
L	1	L	R	R	0	R	1
L	L	L	R	R	R	R	1
L	R	0	1	R	L	1	1
L	0	0	1	R	1	1	1
R	1	R	L	L	0	L	1
R	L	0	1	L	R	1	1
R	R	R	L	L	L	L	1
R	0	0	1	L	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	L	0	1	1	R	1	1
0	R	0	1	1	L	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

⑨ Beh.: Die Negation ¬ ist ein Isomorphismus zwischen der Struktur $(M_2, \wedge)$ und der Struktur $(M_2, \vee)$

Bew.: z.zg.: ① ¬ ist ein Homomorphismus

② ¬ ist bijektiv

ad ①

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$\forall p, q \in M_2: \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Die Gültigkeit dieser Aussage wurde in Aufgabe 8 nachgewiesen.

ad ②

Die Abbildung $\neg: \begin{array}{l} M_2 \rightarrow M_2 \\ p \mapsto \neg p \end{array}$ ist

Selbstinvers.

Es gilt nämlich $\neg(\neg p) = p \quad \forall p \in M_2$:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$
1	0	1	1
L	R	L	1
R	L	R	1
0	1	0	1

Damit ist ¬ bijektiv. $\square$