Aufgabe (27)

(i) $F_1 : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X), Z \longmapsto X \setminus Z$ ist nicht ordnungserhaltend, denn es gilt $\emptyset \subset X$, aber

$$F_1(\emptyset) = X \setminus \emptyset = X \not\subseteq \emptyset = X \setminus X = F_1(X)$$

(ii) $F_2 : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X), Z \longmapsto Z \setminus A$ Ist ordnungserhaltend, denn für $B \subseteq C \subseteq X$ gilt

$$F_2(B) = B \setminus A \subseteq C \setminus A = F_2(C)$$

Die Menge der Fixpunkte ist

$$\{Y \subseteq X | Y \cap A = \emptyset\}$$

(iii) $F_3 : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X), Z \longmapsto Z \cup A$ ist ordnungserhaltend, denn für $B \subseteq C \subseteq X$ gilt

$$F_3(B) = B \cup A \subseteq C \cup A = F_3(C)$$

Die Menge der Fixpunkte ist

$$\{Y \subseteq X | A \subseteq Y\}$$

(iv) $F_4 : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X), Z \longmapsto Z \cap A$ ist ordnungserhaltend, denn für $B \subseteq C \subseteq X$ gilt

$$F_4(B) = B \cap A \subseteq C \cap A = F_4(C)$$

Die Menge der Fixpunkte ist

$$\{Y \subseteq X | Y \subseteq A\}$$

Bemerkung. In der Mathematik gibt es zwei gleichermaßen übliche Definitionen für "ordnungserhaltend". Man kann entweder sagen, daß eine Funktion f ordnungserhaltend ist, falls für alle $x \leq y$ gilt, daß $f(x) \leq f(y)$; alternativ kann man stärker verlangen, daß für alle x und y gilt, daß $x \leq y$ genau dann, wenn $f(x) \leq f(y)$ ist. Diese beiden Definitionen sind **nicht** äquivalent: konstante Abbildungen sind nach der ersten Definition ordnungserhaltend, nach der zweiten i.a. nicht. Beide Definitionen tauchen in der Literatur auf und der Satz von Knaster und Tarski gilt mit beiden Definitionen.
Auf Übungsblatt 4 hatten wir die stärkere Definition gegeben. In der Beispiellösung von Aufgabe (27) wurde die schwächere Definition gewählt. Beide Lösungen werden als korrekt gewertet.

Aufgabe (28)

Behauptung. Sei $(X, \leq)$ ein vollständiger Verband und $F : X \longrightarrow X$ eine ordnungserhaltende Funktion. Sei $h \in X$ ein Fixpunkt dieser Funktion. Falls es ein weiteres $x \in X$ gibt mit $h < x \leq F(x)$, so gibt es einen weiteren Fixpunkt $h' \neq h$.

Beweis. Wir setzen $H' := \{x \in X | h < x \leq F(x)\}$ und $h' := \bigvee H'$. Nach Voraussetzung ist H' nicht leer und daher, zusammen mit der Tatsache, dass X ein vollständiger Verband ist, existiert h'.
Wir zeigen nun:

1. $h' = F(h')$

(i) $h' \leq F(h')$

(ii) $h' \geq F(h')$

2. $h \neq h'$

zu 1.(i): Wir wissen, dass für alle $x \in H'$ gilt $x \leq h'$. Weil F ordnungserhaltend ist, gilt auch $F(x) \leq F(h')$. Weil $x \in H'$, gilt außerdem $x \leq F(x) \leq F(h')$. Da das für alle $x \in H'$ gilt, ist $F(h')$ auch eine obere Schranke von H'. Weil h' die kleinste obere Schranke ist, ist $h' \leq F(h')$.
zu 1.(ii): Wir wissen bereits, dass (i) gilt. Weil F ordnungserhaltend ist, folgt daraus $F(h') \leq F(F(h'))$. Darum ist $F(h') \in H'$. Weil aber h' eine obere Schranke von H' ist, gilt $F(h') \leq h'$.
zu 2.: Daraus, dass H' nicht leer ist und der Tatsache, dass h' das Supremum von H' ist, folgt $h < h'$, also insbesondere $h \neq h'$

$\square$