Vertiefung: Algebraische Strukturen
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 10

Vorlesungswebseite:

`https://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_V_AS.html`

Hausaufgaben werden jeweils in der Übung am Mittwoch abgegeben.

Hausaufgaben zur Abgabe in der Übung am Mittwoch, 20. Juni 2018.

(27) Falls X eine Menge ist, so haben wir in der Vorlesung gezeigt, daß die Potenzmenge von X zusammen mit der Teilmengenrelation, also $(\wp(X), \subseteq)$, ein vollständiger Verband ist. Das bedeutet, daß nach dem Satz von Knaster und Tarski ordnungserhaltende Abbildungen Fixpunkte haben. Sei $\varnothing \subsetneqq A \subsetneqq X$ eine Teilmenge und betrachten Sie die folgenden vier Funktionen definiert für beliebige Mengen $Z \in \wp(X)$:

$$\begin{aligned}
F_1 &: Z \mapsto X \backslash Z, \\
F_2 &: Z \mapsto Z \backslash A, \\
F_3 &: Z \mapsto Z \cup A, \text{ und} \\
F_4 &: Z \mapsto Z \cap A.
\end{aligned}$$

Finden Sie heraus (mit Begründung), welche der vier Funktionen ordnungserhaltend sind. Für die Funktionen, die ordnungserhaltend sind, finden Sie mindestens einen Fixpunkt. Können Sie mehr als einen Fixpunkt finden?

(28) Sei $(X, \leq)$ ein vollständiger Verband und $F : X \to X$ eine ordnungserhaltende Funktion. Nach dem Satz von Knaster und Tarski gibt es also einen Fixpunkt von F, also ein $h \in X$ mit $F(h) = h$.

Nehmen Sie nun zusätzlich an, daß es ein $x \in X$ gibt mit $h < x \leq F(x)$ und zeigen Sie, daß es in X einen zweiten, von h verschiedenen Fixpunkt von F gibt.

Hinweis: Betrachten Sie $H' := \{x \in X \,;\, h < x \leq F(x)\}$ und $h' := \bigvee H'$.