Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 9

http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_WP24.html

Abgabe am Mittwoch, 13. Juni 2018 am Anfang der Übung.

(31) Sei X eine Menge von Wohlordnungen: Elemente von X sind von der Form $(W, <_W)$ für eine Menge W und eine fundierte, strikte totale Ordnung $<_W \subseteq W \times W$. Definieren Sie auf X die Ordnung $(W, <_W) < (W'. <_{W'})$ genau dann, wenn $(W, <_W)$ isomorph zu einem echten Anfangssegment von $(W', <_{W'})$ ist.

Zeigen Sie ohne Verwendung des Repräsentationssatzes für Wohlordnungen, daß $(X, <)$ eine Wohlordnung ist.

(32) Seien $\mathbf{W} := (W, <_W)$ und $\mathbf{W}' := (W', <_{W'})$ zwei abzählbare Wohlordnungen. Zeigen Sie, daß $\mathbf{W} \oplus \mathbf{W}'$ und $\mathbf{W} \otimes \mathbf{W}'$ abzählbar sind und schließen Sie daraus, daß es keine größte abzählbare Ordinalzahl gibt.

(33) Sei I eine induktive Menge. Zeigen Sie, daß $\{x \in I\,; x \text{ ist eine Ordinalzahl}\}$ induktiv ist.

(34) Seien α, β und γ Ordinalzahlen. Zeigen Sie, daß

(a) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,

(b) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ und

(c) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.