Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 7

`http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_WP24.html`

Abgabe am Mittwoch, 30. Mai 2018 am Anfang der Übung.

(23) Sei $(X, \leq)$ eine linear geordnete Menge. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt Z *ordnungsinduktiv*, falls für alle $x \in X$ gilt: wenn $\{z \in X\,;\, z < x\} \subseteq Z$, so ist $x \in Z$.

Wir sagen, daß $(X, \leq)$ das *Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt*, falls für jede ordnungsinduktive Teilmenge $Z \subseteq X$ gilt, daß $Z = X$.

Zeigen Sie, daß $(\mathbb{N}, \subseteq)$ das Prinzip der Ordnungsinduktion erfüllt.

(24) Sei $S := \{\dot{S}, \dot{\leq}, \dot{0}\}$ eine Symbolmenge, wobei $\dot{S}$ ein unäres Funktionssymbol, $\dot{\leq}$ ein binäres Relationssymbol und $\dot{0}$ ein Konstantensymbol sind. Wir definieren die *Nachfolgerarithmetik* SA als die S-Satzmenge bestehend aus

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y (x \,\dot{\leq}\, y \vee y \,\dot{\leq}\, x)\\
&\forall x \forall y \forall z ((x \,\dot{\leq}\, y \wedge y \,\dot{\leq}\, z) \to x \,\dot{\leq}\, z)\\
&\forall x (x = \dot{0} \leftrightarrow \neg \exists y (x = \dot{S}(y))),\\
&\forall x \forall y (\dot{S}(x) = \dot{S}(y) \to x = y),\\
&\forall x (\dot{0} \,\dot{\leq}\, x),\\
&\forall x (x \,\dot{\leq}\, \dot{S}(x) \wedge \neg x = \dot{S}(x)\\
&\Big(\varphi(\dot{0}) \wedge \forall x \Big(\varphi(x) \to \varphi(\dot{S}(x))\Big)\Big) \to \forall x \varphi(x),
\end{aligned}$$

wobei φ eine beliebige L^S-Formel in einer freien Variable ist.

(a) Zeigen Sie, daß $(\mathbb{N}, s, \subseteq, 0) \models \mathsf{SA}$, wobei $s(x) := x \cup \{x\}$.

(b) Finden Sie eine Operation $s' : \mathbb{N}_{\text{Zermelo}} \to \mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$ und eine Relation $\leq \subseteq \mathbb{N}_{\text{Zermelo}} \times \mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$, so daß $(\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}, s', \leq, 0) \models \mathsf{SA}$ und beweisen Sie diese Aussage (s. Aufgabe (21) für die Definition von $\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$).

(25) Wir verwenden die Symbolmenge S aus Aufgabe (24). Sei $(X, s, \leq, 0)$ eine S-Struktur. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *induktiv bzgl. s und* 0 falls $0 \in A$ und für jedes $x \in A$ ist auch $s(x) \in A$. Wir sagen, daß $(X, s, \leq, 0)$ das *Prinzip der vollständigen Induktion* erfüllt, falls X die einzige Menge ist, die induktiv bzgl. s und 0 ist.

Finden Sie eine induktive Menge I, so daß $\subseteq$ eine lineare Ordnung auf I ist, aber $(I, s, \subseteq, 0)$ nicht das Prinzip der vollständigen Induktion erfüllt.

(26) Wir arbeiten nun in der Sprache der Mengenlehre LST und schreiben

$$\Phi_{\mathrm{plus}}(x, y, z) :\Longleftrightarrow \exists a \exists b \exists f \exists g (a \cap b = \varnothing \wedge a \cup b = z \wedge \mathrm{Bij}(f, x, a) \wedge \mathrm{Bij}(g, y, b)),$$

wobei $\mathrm{Bij}(h, v, w)$ für die Formel, die "h ist eine Bijektion von v nach w" ausdrückt, steht. Zeigen Sie, daß diese Formel eine binäre Operation auf $\mathbb{N}$ definiert (hierfür müssen Existenz und Eindeutigkeit von z gezeigt werden) und daß für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x + y = z \text{ genau dann, wenn } \Phi_{\mathrm{plus}}(x, y, z).$$