Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 6

`http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_WP24.html`

Abgabe am Mittwoch, 16. Mai 2018 am Anfang der Übung.
Unsere bisherigen Axiome:

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow (\forall z (y \in x \leftrightarrow z \in y))), \tag{Ext}$$

$$\exists \ell \forall z (z \notin \ell), \tag{Leer}$$

$$\forall x \exists s \forall z (z \in s \leftrightarrow z = x), \tag{Einer}$$

$$\forall x \forall y \exists p \forall z (z \in p \leftrightarrow (z = x \vee z = y)), \tag{Paar}$$

$$\forall x \forall y \exists u \forall z (z \in u \leftrightarrow (z \in x \vee z \in y)), \tag{BinVer}$$

$$\forall x \exists u \forall z (z \in u \leftrightarrow \exists y (y \in x \wedge z \in y), \tag{Ver}$$

$$\forall x \forall p_1 \ldots \forall p_n \exists s \forall z (z \in s \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, p_1, ..., p_n)) \tag{Aus_φ}$$

und (Aus) ist die Menge $\{(\mathrm{Aus}_\varphi)\,;\, \varphi \in L^{\{\in\}}\}$.

(20) Konstruieren Sie ein Graphenmodell, welches (Ext), (Aus), (Einer) und (Ver) erfüllt, aber nicht (Paar) und beweisen Sie diese Behauptung.

(21) Eine Menge I hieß *induktiv*, falls $\varnothing \in I$ und für alle $x \in I$, ist auch $x \cup \{x\} \in I$.

Analog nennen wir eine Menge Z *Zermelo-induktiv* falls $\varnothing \in Z$ und für alle $x \in Z$, ist auch $\{x\} \in Z$. Zeigen Sie:

(a) Falls es eine Zermelo-induktive Menge gibt, so gibt es eine minimale Zermelo-induktive Menge.

(b) Wir bezeichnen die minimale Zermelo-induktive Menge aus (a) mit $\mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}}$. Dann gilt $\bigcup \mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}} = \mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}}$.

(c) Falls $x \in \mathbb{N}_{\mathrm{Zermelo}}$, so gilt $x \notin x$.

(22) Wir erinnern uns an die Konstruktion des Graphenmodells $\mathfrak{G}_{\mathrm{Pot}}$ aus der Vorlesung. Es seien $\mathfrak{G} = (G, E_G)$ und $\mathfrak{H} = (H, E_H)$ zwei disjunkte Kopien dieses Graphenmodells mit minimalen Knoten $e_G \in G$ und $e_H \in H$. Sei e ein Knoten, der weder in G noch in H liegt. Definieren Sie ein Graphenmodell $\mathfrak{M} = (M, E)$ durch

(a) $M := \{e\} \cup G \backslash \{e_G\} \cup H \backslash \{e_H\}$;

(b) falls $x \in G$, dann sei eEx genau dann, wenn $e_G E_G x$;

(c) falls $x \in H$, dann sei eEx genau dann, wenn $e_H E_H x$;

(d) falls $x, y \in G$, dann sei xEy genau dann, wenn $xE_G y$;

(e) falls $x, y \in H$, dann sei xEy genau dann, wenn $xE_H y$;

(f) falls $x \in G$ und $y \in H$, dann gibt es **keine** Kante zwischen x und y in $\mathfrak{M}$.

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{M}$ die Axiome (Einer), (Ver), (Pot) und (Aus), aber nicht (Ext), (Paar) und (BinVer) erfüllt.