Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 4

http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_WP24.html

Abgabe am Mittwoch, 2. Mai 2018 am Anfang der Übung.

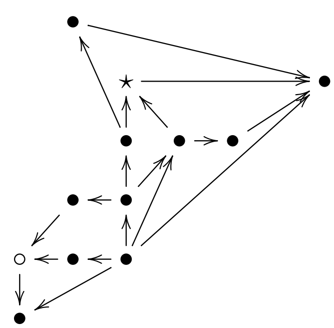
(13) Sei S eine Symbolmenge, $\mathfrak{A} = (A, \iota_{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \iota_{\mathfrak{B}})$ zwei S-Strukturen und $\pi : A \to B$ eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. Zeigen Sie daß die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind (das sogenannte *Tarski-Vaught-Kriterium* für elementare Einbettungen):

(a) die Abbildung π ist eine elementare Einbettung und

(b) für jede Formel φ mit freien Variablen $x_0, ..., x_n$ und $a_1, ..., a_n \in A$ gilt: falls es ein $b \in B$ gibt, so daß $\mathfrak{B} \models \varphi\frac{b}{x_0}\frac{\pi(a_1)}{x_1}\cdots\frac{\pi(a_n)}{x_n}$, so gibt es ein $a \in A$, so daß $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{a}{x_0}\frac{a_1}{x_1}\cdots\frac{a_n}{x_n}$.

(14) Sei $S = \varnothing$ die leere Symbolmenge und seien $X \subseteq Y$ Mengen; dann sind $(X, \varnothing)$ und $(Y, \varnothing)$ S-Strukturen. Zeigen Sie: falls X unendlich ist, so existiert eine elementare Einbettung von $(X, \varnothing)$ nach $(Y, \varnothing)$. Was passiert, wenn X endlich ist?

(15) Betrachten Sie den folgenden endlichen gerichteten Graphen $\mathfrak{G}$ und interpretieren Sie ihn als $\{\in\}$-Struktur. Betrachten Sie die Knoten, die durch $\star$ und $\circ$ gekennzeichnet sind und finden Sie heraus, ob die $\mathfrak{G}$-Potenzmenge dieser Knoten in $\mathfrak{G}$ existiert. Welche der folgenden Axiome der Mengenlehre gelten in $\mathfrak{G}$: Extensionalitätsaxiom, Paarmengenaxiom, Potenzmengenaxiom?



(16) Sei X eine Menge und R eine beliebige binäre Relation auf X. Zeigen Sie

(a) falls R symmetrisch ist, so ist (X, R) kein Modell der Mengenlehre und

(b) falls R transitiv ist, so ist (X, R) kein Modell der Mengenlehre,

indem Sie jeweils eine Liste von Axiomen angeben, die nicht erfüllt sein können, wenn R die genannte Eigenschaft hat.