Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 12

`http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_WP24.html`

Abgabe am Mittwoch, 4. Juli 2018 am Anfang der Übung.

(41) Wir arbeiten in ZF, also unter Annahme des Regularitätsaxioms. Wir haben bewiesen, daß unter dieser Annahme für jede Menge x der *Mirimanoff-Rang*

$$\varrho(x) := \min\{\alpha\,;\, x \in \mathbf{V}_{\alpha+1}\}$$

existiert. Nehmen Sie an, daß $\varrho(x) = \alpha$ und $\varrho(y) = \beta$ und bestimmen Sie $\varrho(\{x\})$, $\varrho(\{x,y\})$, $\varrho(x \cup y)$, $\varrho(x \backslash y)$ und $\varrho(\wp(x))$.

(42) Sei S eine Symbolmenge, $x_0, \ldots, x_r$ Variablen, $t_0, \ldots, t_r, t$ S-Terme und φ eine S-Formel. Wir hatten in der Vorlesung die *syntaktischen Substitionen* $t\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$ und $\varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$ definiert und das Substitutionslemma formuliert:

(i) $\mathfrak{I}(t\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r}(t)$.

(ii) $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r} \models \varphi$.

Beweisen Sie das Substitutionslemma.

(43) Eine Sequenz $\Gamma\varphi$ hieß *korrekt*, wenn $\Gamma \models \varphi$; eine Regel hieß *korrekt*, wenn sie aus korrekten Sequenzen nur korrekte Sequenzen ableiten kann. Zeigen Sie, daß die folgenden Regeln korrekt sind:

(i) Die Substitutionsregel:

$$\frac{\Gamma \qquad\qquad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad t = t' \quad \varphi\frac{t'}{x}},$$

(ii) Die Kontrapositionsregel:

$$\frac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \neg\psi \quad \neg\varphi},$$

(iii) Die *duplex negatio*-Regel:

$$\frac{\Gamma \quad \neg\neg\varphi}{\Gamma \quad \varphi},$$

(iv) Die Transitivitätsregel:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & t_1 = t_2 \\ \Gamma & t_2 = t_3 \\ \hline \Gamma & t_1 = t_3. \end{array}$$

(44) Sei S eine Symbolmenge. Eine *Regel* ist eine Menge von Tupeln von S-Sequenzen der gleichen Länge; eine *nullstellige Regel* ist eine Menge von Sequenzen, eine *einstellige Regel* ist eine Menge von Paaren von Sequenzen und eine *zweistellige Regel* ist eine Menge von Tripeln von Sequenzen.

Eine Menge $\mathfrak{K}$ von Regeln nennen wir *Kalkül.* Falls $\mathfrak{K}$ ein Kalkül ist, so nennen wir eine endliche Folge von Sequenzen $D = (\Delta_0, \ldots, \Delta_n)$ eine $\mathfrak{K}$-Ableitung, falls für jedes $i \leq n$ eine Regel $\mathbf{R} \in \mathfrak{K}$ existiert, so daß

(a) $\mathbf{R}$ ist eine nullstellige Regel und $\Delta_i \in \mathbf{R}$ oder

(b) $\mathbf{R}$ ist eine einstellige Regel und es gibt ein $j < i$, so daß $(\Delta_j, \Delta_i) \in \mathbf{R}$ oder

(c) $\mathbf{R}$ ist eine zweistellige Regel und es gibt $j, k < i$, so daß $(\Delta_j, \Delta_k, \Delta_i) \in \mathbf{R}$.

Wir nennen eine Sequenz Δ $\mathfrak{K}$-ableitbar, falls eine $\mathfrak{K}$-Ableitung $D = (\Delta_0, \ldots, \Delta_n)$ existiert, so daß $\Delta = \Delta_i$ für ein $i \leq n$. Sei nun Λ eine Menge von S-Formeln und φ eine S-Formel. Wir schreiben $\Lambda \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ ("Λ beweist φ im Kalkül $\mathfrak{K}$"), falls eine Folge Γ von Elementen von Λ existiert, so daß die Sequenz $\Gamma\varphi$ $\mathfrak{K}$-ableitbar ist. Eine Menge Λ heißt $\mathfrak{K}$-*widersprüchlich*, falls für alle Formeln φ gilt, daß $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$; sie heißt $\mathfrak{K}$-*widerspruchsfrei*, falls sie nicht $\mathfrak{K}$-widersprüchlich ist.

Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ heißt *korrekt*, falls für jede Formelmenge Λ gilt: falls $\Lambda \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so $\Lambda \models \varphi$.

Wir erinnern außerdem an die zweistellige WIDERSPRUCHSREGEL:

$$\mathbf{R}_{\text{Wid}} := \{(\Gamma\neg\varphi\psi, \Gamma\neg\varphi\neg\psi, \Gamma\varphi)\,;\, \Gamma\varphi\psi \text{ ist eine Folge von Formeln}\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ ist korrekt genau dann, wenn jede Regel in $\mathfrak{K}$ korrekt ist.

(ii) Falls $\Lambda \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so existiert eine endliche Teilmenge $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ mit $\Lambda_0 \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$.

(iii) Falls $\mathfrak{K}$ korrekt ist und Λ erfüllbar, so ist Λ $\mathfrak{K}$-widerspruchsfrei.

(iv) Falls $\mathbf{R}_{\text{Wid}} \in \mathfrak{K}$, so ist eine Menge von Formeln Λ genau dann $\mathfrak{K}$-widersprüchlich, wenn es eine Formel φ gibt, so daß $\Lambda \vdash \varphi$ und $\Lambda \vdash \neg\varphi$.

(v) Falls $\mathbf{R}_{\text{Wid}} \in \mathfrak{K}$, so ist eine Menge von Formeln Λ genau dann $\mathfrak{K}$-widersprüchlich, wenn es eine endliche Teilmenge $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ gibt, so daß Λ_0 $\mathfrak{K}$-widersprüchlich ist.