Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 11

`http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_WP24.html`

Abgabe am Mittwoch, 27. Juni 2018 am Anfang der Übung.

(38) Der Satz von Cantor-Schröder-Bernstein besagt: falls es eine Injektion von X nach Y und eine Injektion von Y nach X gibt, so gibt es eine Bijektion zwischen X und Y. Zeigen Sie diesen Satz in den folgenden drei Schritten:

(a) Sei X eine Menge und $F : \wp(X) \to \wp(X)$ eine Funktion, die die Teilmengenrelation erhält, also für $A \subseteq B$ gilt $F(A) \subseteq F(B)$. Dann ist $H := \{x \in X\,;\, \exists A(x \in A \wedge A \subseteq F(A))\}$ ein Fixpunkt von F, also $H = F(H)$.

(b) (Banachscher Zerlegungssatz.) Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ beliebige Funktionen. Dann gibt es disjunkte Zerlegungen $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$, so daß $f[X_1] = Y_1$ und $g[Y_2] = Y_1$.

Hinweis. Betrachten Sie $F : \wp(X) \to \wp(X)$ definiert durch $F(S) := X \backslash g[Y \backslash f[S]]$ und wenden Sie Teil (a) an.

(c) Folgern Sie den Satz von Cantor-Schröder-Bernstein aus dem Banachschen Zerlegungssatz.

(39) Sei X eine Menge von nichtleeren Mengen. Eine Menge C heißt *Auswahlmenge für* X, falls für jedes $x \in X$, die Menge $C \cap x$ einelementig ist. Wir bezeichnen die Aussage "für jede Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen gibt es eine Auswahlmenge" als AC'.

Zeigen Sie, daß AC und AC' äquivalent sind.

Ist die zusätzliche Forderung "paarweise disjunkt" notwendig?

(40) Eine partielle Ordnung $(P, \leq)$ heißt *kettenvollständig*, wenn für jede Kette eine obere Schranke existiert: falls $C \subseteq P$, so daß $(C, \leq)$ eine totale Ordnung ist, so existiert $s \in P$, so daß für alle $c \in C$ gilt, daß $c \leq s$. Das *Zornsche Lemma* besagt: "Jede kettenvollständige partielle Ordnung besitzt ein maximales Element."

Beweisen Sie das Zornsche Lemma mit Hilfe des Auswahlaxioms.