Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 10

http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/SS18_WP24.html

Abgabe am Mittwoch, 20. Juni 2018 am Anfang der Übung.

(34) (Wiederholt von Übungsblatt 9.) Seien α, β und γ Ordinalzahlen. Zeigen Sie, daß

(a) falls $\alpha > 0$ und $\beta < \gamma$, dann $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$,

(b) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$,

(c) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,

(d) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ und

(e) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

(35) Sei $\alpha > 0$ eine Ordinalzahl. Wir sagen, daß eine endliche Folge von Ordinalzahlen $(\beta_n, ..., \beta_0)$ eine *CNF-Darstellung von α* ist (für "Cantor-Normalform"), falls

(a) $\beta_n \geq \beta_{n-1} \geq ... \geq \beta_0$ und

(b) $\alpha = \omega^{\beta_n} + ... + \omega^{\beta_0}$.

Zeigen Sie, daß jede positive Ordinalzahl eine eindeutig bestimmte CNF-Darstellung hat.

(36) Sei α eine abzählbare Ordinalzahl.

(a) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \alpha$, so daß $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n)$.

(b) Finden Sie eine ordnungserhaltende Injektion $f : (\alpha, \in) \to (\mathbb{Q}, <)$.

Sei ω_1 die kleinste überabzählbare Ordinalzahl (also nach dem Satz von Hartogs die Menge aller abzählbaren Ordinalzahlen). Können Sie eine ordnungserhaltende Injektion $f : (\omega_1, \in) \to (\mathbb{R}, <)$ finden?

(37) Wir verwenden die Notation ω_1 aus Aufgabe (36) und schreiben $\Lambda := \{\lambda \in \omega_1\,;\, \lambda \text{ ist Limesordinalzahl}\}$. Gibt es eine Funktion $F : \Lambda \to \omega_1$, so daß für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt, daß $F(\lambda) < \lambda$?